BIBLIOTECA 'SANDRON, DI SCIENZE E LETTERE

N. 120.

D.re DIONISIO GAMBIOLI

BREVE SOMMARIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

COLLE DUE APPENDICI

SUI MATEMATICI ITALIANI

E

SUI TRE CELEBRI PROBLEMI GEOMETRICI DELL'ANTICHITÀ

AD USO DELLE SCUOLE SECONDARIE

2a Edizione

EDIZIONI SANDRON

Digitized by Google

D.re DIONISIO GAMBIOLI
Prof. del R. Istituto Tecnico Leonardo Da Vinci di Roma.

BREVE SOMMARIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

COLLE DUE APPENDICI

SUI MATEMATICI ITALIANI E SUI TRE CELEBRI PROBLEMI GEOMETRICI DELL'ANTICHITÀ

AD USO DELLE SCUOLE SECONDARIE

2ª Edizione

C. S. I.
BIBLIOTECA D' FILOSOFIA

1929 — Anno VII
REMO SANDRON EDITORE
Librajo della Real Casa
PALERMO
ROMA-MILANO-NAPOLI-GENOVA-BOLOGNA-TORINO-FIRENZE

Digitized by Google

Prefazione.

Chi percorrendo gli studî secondari non si è imbattuto ne' nomi di Talete, di Pitagora, di Euclide, di Archimede, di Apollonio, di Tolomeo, di Pappo, di Leonardo da Vinci, di Galileo, di Newton, di Pascal, di Carnot, di Lagrange, e non ha sentito vivo il desiderio, direi anzi il bisogno, di conoscere la storia di questi grandi uomini, i cui nomi sono legati alle più importanti scoperte delle discipline matematiche, fisiche e meccaniche?

E che cosa dir si dovrebbe di un giovane, che ignorasse la storia dei grandi Capitani di Grecia e di Roma e di coloro che fecero la nostra Italia una e grande?

La storia non solo registra le vittorie riportate sui campi di battaglia, ma anche quelle guadagnate ne' campi della scienza; e quest'ultime sono assai più gloriose di quelle, perchè più pure, più utili, più feconde; le uniche che sublimano veramente l'uomo e ne costituiscono la sua vera grandezza. Onde ogni giovinetto, che con vero intelletto di amore si dedica allo studio della matematica, non deve ignorare la storia di quelli, che colle loro scoperte hanno reso sì grandi servigi a questa scienza e l'han fatta progredire.

Io opino poi che lo studio della storia delle matematiche gli sarà di gran vantaggio non soltanto, perchè egli in tal

Digitized by Google

guisa arricchirà la sua coltura generale e questo studio lo invoglierà vie più a quello della scienza, così ne aumenterà il suo valore educativo; ma anche perchè esso gli servirà come mezzo mnemonico per vie meglio conoscere e ricordare i teoremi fondamentali, che altrimenti avrebbe ben presto dimenticati.

Ben pochi sono i libri elementari di matematiche, che a piè di pagina o nella prefazione hanno qualche cenno storico e bibliografico, cenni sempre troppo concisi ed il più delle volte inesatti.

A colmare una tal lacuna ho pensato di compilare questo brevissimo sommario della storia delle matematiche, nel quale l'alunno delle nostre scuole secondarie, ed anche universitarie, troverà raccolte in poche pagine, le notizie più importanti sui più grandi matematici antichi e moderni; e ciò è quanto basta per lui. Imperocchè sarebbe inutile, e forse dannoso, dargli in mano un Compendio, per quanto breve esso sia, della storia delle matematiche, cui egli per molteplici ragioni non leggerebbe certamente: la mole soltanto lo spaventerebbe!

Per la compilazione di questo libriccino mi sono naturalmente servito del «A short account of history of Mathematics» del Prof. W. Rouse Ball dell'università di Cambridge, volto nel nostro idioma da me e dal Prof. G. Loria; poi mi son servito della mia «Appendice sui matematici italiani de' tempi recenti»; ed infine del «A primer of the history of mathematics» e delle «Mathematical recreations and Problems ecc» dello stesso Rouse Ball.

Come si è detto, oggetto principale di questo brevissimo sommario è di esporre in una maniera piana, direi quasi popolare, la storia delle matematiche; esso comprende le notizie più interessanti della vita specialmente di quei matematici, cui è principalmente dovuto lo sviluppo ed il progresso delle matematiche e delle loro più importanti scoperte.

Digitized by Google

Onde questo libriccino è scritto in un linguaggio non del tutto scientifico, affinchè possa esser meglio compreso dai giovani, cui è dedicato; ed essendo in poche pagine condensato, non può essere quindi che un breve sunto della storia delle matematiche; perciò non è destinato a coloro che hanno familiarità con essa.

Ecco in breve l'ordine della materia contenuta in questo breve sommario.

Non potendo la storia delle matematiche essere divisa in iscuole ed in periodi prima della storia greco-ionica, come può essere divisa la successiva in periodi, i cui limiti sono sufficientemente determinati, ho quindi esposto prima la storia delle matematiche sotto l'influenza greca, poi quella del Medio-evo e del Rinascimento; indi quella della invenzione dell'Analisi moderna; infine espongo i principali caratteri delle matematiche del secolo XIX.

Ho poi aggiunto due brevi Appendici, l'una sui Matematici italiani e l'altra sui tre celebri problemi geometrici classici dell'antichità ed una breve dimostrazione della trascendenza di π *.*

Nutro speranza che il pubblico vorrà accogliere favorevolmente anche la 2ª edizione di questo libriccino, il quale se non avrà altro merito, certo possederà quello della novità.

Roma, 1928.

D.r Dionisio Gambioli.

Digitized by Google

CAPITOLO I.

La matematica sotto l' influenza greca

1. ***La matematica egiziana e fenicia.*** — È certo che gran parte delle razze umane hanno lasciato qualche ricordo de' loro studî sui numeri, sulla meccanica, e sugli elementi di agrimensura; e gli Egiziani particolarmente si occuparono dello studio della geometria e de' numeri, e probabilmente i Fenici dell'aritmetica pratica, della computisteria, della nautica e forse anche dell'agrimensura.

I risultati degli studî di questi popoli pare che furono noti sotto certe condizioni ai viaggiatori di quell'epoca; e lo studio della matematica greca per l'influenza esercitata da alcune proposizioni di geometria, ebbe principio in questo modo nel settimo secolo prima di Cristo per mezzo dei sacerdoti egiziani. È assai probabile che la scienza dei Fenici e degli Egiziani sia il risultato in gran parte della osservazione e della misura ed il frutto della esperienza di tanti secoli. D'altronde la matematica greca, che incomincia collo studio della geometria fin dal suo inizio, tende ad essere deduttiva e scientifica.

2. ***Talete***, *circa 640-550 a. C.* — Talete di Mileto fu il fondatore della prima scuola greca di Matematica e di Filosofia. Egli dedicò i primi suoi anni al commercio e ai pubblici affari, ne' quali si acquistò gran rinomanza per la sagacità e pel grande acume; e in proposito molti aneddoti si raccontano di lui.

Digitized by Google

Nella giovinezza si recò per i suoi negozi in Egitto, ove ebbe occasione di potere studiare la Geometria e l'Astronomia. Giunto all'età di mezzo abbandonò i commerci, si stabilì a Mileto, ove si dedicò poi per tutta la vita allo studio della filosofia e della scienza.

3. Si crede che l'insegnamento della matematica, impartito da Talete, consistesse in un certo numero di proposizioni isolate, ma ordinate logicamente; però le dimostrazioni sono deduttive; sicchè i teoremi non erano che una mera induzione di un gran numero di postulati particolari, come probabilmente si sarà ciò verificato anche presso gli Egiziani; e senza dubbio fu gran merito di Talete l'aver dato alla scienza questo carattere deduttivo.

4. Ecco le principali proposizioni che a ragione si possono probabilmente attribuire a Talete.

a) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali. (Euclide I-5).

Questo teor. probabilmente fu dimostrato prendendo un altro triangolo isoscele rispettivamente eguale, ribaltandolo e poi sovrapponendolo al primo.

b) Se due linee rette si tagliano fra loro, gli angoli opposti sono eguali. (Euclide I-15).

Assai probabilmente Talete riguardò questa proposizione come un assioma.

c) Un triangolo è determinato se son dati la sua base e gli angoli ad essa adiacenti (Eucl. 1-26).

Questa proposizione fu certamente impiegata per trovare la distanza di una nave in alto mare, la base essendo una torre e gli angoli ad essa adiacenti essendo ottenuti mediante l'osservazione.

d) I lati dei triangoli equiangoli sono proporzionali. (Eucl. VI-4 o VI-2).

Questa proposizione sarebbe stata suggerita dal desiderio di determinare l'altezza di una piramide, poichè in un dialogo di Plutarco l'interlocutore diceva a Talete: « Mettendo il vostro bastone al termine dell'ombra della piramide, ottenete mediante

Digitized by Google

i raggi del sole due triangoli, così dimostrate che l'altezza della piramide sta alla lunghezza del bastone, come l'ombra della piramide sta a quella del bastone ». Si dice che gli Egiziani prima non conoscessero questo teorema e rimanessero meravigliati di questa nuova applicazione della scienza astratta.

e) L'angolo sotteso da un diametro di un cerchio ad ogni punto della circonferenza è retto. (Eucl. III, 31).

Si suppone che Talete dimostrasse questo teor. congiungendo il centro del cerchio col vertice dell'angolo, e così ottenesse due triangoli isosceli, quindi applicasse il teor. *a*). Se tutto ciò è vero, se ne inferisce che Talete sapeva « che la somma degli angoli di un triangolo rettangolo è uguale a due angoli retti ». È probabile che questa proposizione fosse stata suggerita dalla forma delle mattonelle adoperate per gl'impiantiti e fosse stata da prima dimostrata per casi particolari e poi in generale così: « Due triangoli rettangoli eguali possono disporsi in modo da formare un rettangolo, in cui la somma degli angoli è uguale a 4 retti; onde la proposizione è vera per qualunque triangolo rettangolo. Ma ogni triangolo può scomporsi in due triangoli rettangoli mediante la perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo maggiore sul lato opposto; quindi la proposizione è vera in generale.

5. Talete fra i suoi contemporanei ebbe maggior fama come astronomo che come matematico; possiamo ad esempio rammentare che egli asserì che la Terra aveva la forma sferica ed un anno aveva 365 giorni circa; inoltre pare che abbia spiegato le cause delle eclissi della luna e del sole; ed è ben noto che predisse un'ecclisse solare, che si verificò nel tempo all'incirca in cui fu presagita; questa data è il 28 maggio 585 a. C. ovvero il 30 settembre 609 a. C. Benchè questa profezia ed il suo compimento dessero straordinario prestigio al suo insegnamento e gli procacciassero il nome di uno de' sette saggi della Grecia, tuttavia è di molto probabile che Talete non abbia avuto altro merito che quello di adoperare una delle effemeridi egiziane o caldee, le quali stabilivano che le eclissi solari ricorrono ad intervalli di 18 anni e 11 giorni.

6. ***I successori di Talete.*** — La scuola fondata da Talete

Digitized by Google

continuò a fiorire per più di un secolo dopo la sua morte; ma col volger del tempo i componenti di essa si dedicarono maggiormente alla Filosofia ed. all'Astronomia. La matematica greca progredì ulteriormente ed in gran parte sotto l'influenza de' Pitagorici, che aggiunsero alla geometria la scienza de' numeri.

7. ***Pitagora***, *circa 569-500 a. C.* — Pitagora dedicò i primi anni della sua virilità agli studî ed ai viaggi da lui fatti nell'Asia Minore ed in Egitto; indi si stabilì a Samo, suo paese nativo, ove insegnò senza frutto alcuno.

Verso il 529 a. C. emigrò in Sicilia; poi si recò a Taranto, e dopo poco tempo andò a Crotone. Le scuole, che egli vi aprì, erano sempre affollate da un uditorio entusiasta, formato di cittadini di ogni condizione, ma specialmente di quelli, che appartenevano alle classi più elevate.

Anche le donne vi accorrevano, benchè una legge vietasse loro di assistere a pubblici comizi.

8. Pitagora era uso dividere la sua scolaresca in due classi: quella degli *Uditori* e quella de' *Matematici*, detti anche *Pitagorici;* la prima era assai più numerosa della seconda; ma solo a questi ultimi eran rivelate le principali scoperte.

L'ultima era una specie di sodalizio, che aveva comunanza di vita, di credenze filosofiche e politiche; i suoi membri si dedicavano agli stessi studî ed eran vincolati dal giuramento di non rivelare ad alcuno nè l'insegnamento, che s'impartiva, nè i segreti della loro scuola. Il loro tenor di vita era semplice in tutto; avevano una disciplina assai severa, che imponeva loro la temperanza, la purità e l'obbedienza. Tutto ciò fece acquistare a questa società segreta la supremazia nello Stato, supremazia che destò l'odio nelle altre classi, tanto che il popolaccio, istigato anche dagli oppositori politici, un bel dì assassinò Pitagora e molti de' suoi seguaci.

Un tal delitto senza dubbio diminuì l'influenza politica de' Pitagorici, i quali tosto la rafforzarono col fondare in Taranto una società filosofica e matematica. Essa continuò a fiorire per più di cento anni; ma poi finì per divenire una società segreta; onde non si conoscono ulteriori particolari della sua storia.

Digitized by Google

9. Egli è certo che Pitagora nel suo insegnamento non usava libri di testo; era stabilito da questa scuola che la scienza, nota a tutti i suoi membri, fosse tenuta invece nascosta a quelli, che non appartenevano ad essa. Allorchè questa scuola allargò la sua cerchia, i suoi componenti incominciarono a scrivere Trattati, i quali contenevano la sostanza del loro insegnamento e delle loro dottrine. Il primo libro di questa specie fu compilato da Filolao (circa il 385 a. C.). Platone potè metterne in salvo una copia.

10. Pitagora fu principalmente un filosofo ed un moralista; però i suoi insegnamenti filosofici ed etici erano preceduti e basati sopra uno studio della Matematica, che egli divideva in quattro parti fondamentali. Questo *quadrivium* consisteva: 1.° di grandezze in quiete o Geometria; 2.° di grandezze in moto od Astronomia (e forse Meccanica); 3.° di numeri assoluti od Aritmetica; 4.° di numeri applicati o musica. Questa divisione continuò ad essere in uso per parecchi secoli.

11. La Geometria era la base fondamentale dello insegnamento di Pitagora, il quale diede ad essa quel carattere deduttivo che ora possiede; e si ha ragione a credere, che egli disponesse in un ordine logico le proposizioni principali.

Probabilmente egli stesso conosceva ed insegnava la sostanza, di ciò che è contenuto nei primi due libri di Euclide, ed altri pochi teoremi isolati, che riguardavano le grandezze incommensurabili. I suoi successori aggiunsero parecchie delle proposizioni del VI e dell'XI libro di Euclide; però credesi che molte delle dimostrazioni non fossero rigorose, e particolarmente i teoremi inversi venivano talvolta assunti senza dimostrazione.

12. Le principali scoperte di Pitagora sono:

1ª). La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti (Euclide I, 32). E pare che siano di Pitagora le dimostrazioni delle proposizioni 13 e 29 del libro I di Euclide.

2ª). Le proprietà del triangolo rettangolo contenute dalle proposizioni 47 e 48 del libro I di Euclide; però le dimostrazioni date da Pitagora ora non esistono; quelle odierne sono di Euclide.

Digitized by Google

3[a]). Si attribuiscono a Pitagora i teoremi 44 e 45 del libro I di Euclide e la risoluzione del problema della proposizione 14[a] del libro II, cioè « Trasformare un rettangolo nel quadrato equivalente », che equivale a quadrare un poligono. A proposito di questa scoperta si conta che Pitagora, o meglio la sua scuola, sacrificasse agli Dei un bue.

4[a]). Pitagora mise fra i solidi regolari il cubo, il tetraedro, l'ottaedro e forse anche l'icosaedro, cui Ippaso (circa il 470 a. C.), appartenente alla sua scuola, aggiunse il dodecaedro.

5[a]). Pare che Pitagora conoscesse parecchie proposizioni sulle grandezze incommensurabili; e si crede che egli sia stato il primo a dimostrare che la diagonale ed il lato del quadrato sono incommensurabili ($d : 1 = \sqrt{2}$). Sembra che una tale scoperta consigliasse i Greci a bandire dalla loro geometria i concetti di numero e di misura. Si opina che la dimostrazione di Pitagora fosse la seguente: Suppongasi che il rapporto del lato e della diagonale sia eguale a quello dei due numeri a e b, e per semplicità suppongasi che essi sieno primi fra loro; dunque (Eucl. I-47) $b^2 = 2a^2$; perciò b è un N.2; ma essendo a primo con b, ne consegue che a è un N2 + 1; allora sarà $b = 2n$, ove n è un N_1; quindi $(2n)^2 = 2a^2$; d'onde: $a^2 = 2n^2$; perciò a è un N. 2. Così a è ad un tempo un N. 2 e un N2 + 1; il che è assurdo; onde il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili.

6[a]). Le proprietà del cerchio e della sfera di essere *massime* fra le figure dello stesso perimetro e della stessa superficie.

Queste proposizioni contengono il germe della teoria degli isoperimetri.

13. Può dirsi che Pitagora abbia creato la scienza de' numeri o l'Aritmetica superiore, e ciò fu riguardato dalla sua scuola come una delle sue principali glorie. Pitagora dava grande importanza a questa scienza, poichè sapendo che la misura era un elemento essenziale all'accurata definizione di forma, credeva che essa fosse anche in gran parte la causa della forma stessa; onde egli insegnava che il fondamento della teoria dell'universo doveva ricercarsi in quella de' numeri. Tuttavia è bene ricordare che questa « Aritmetica » greca non ha legame

Digitized by Google

alcuno coll'arte del conteggio (1); ma riguarda solo le proprietà de' numeri (cioè le proporzioni, i divisori, le serie ecc.), le quali furon poi studiate per mezzo della Geometria.

14. Pitagora incominciava nella sua Aritmetica a dividere tutti i numeri in pari e dispari; poi in semplici e composti, dividendo questi ultimi in tre specie, secondo che sono maggiori, uguali o minori della somma dei loro divisori intieri. Studiò pure i numeri di forme speciali, particolarmente « i *triangolari* », numeri della forma $\frac{1}{2}\, n\, (n+1)$ e le terne degli N_1, come 3, 4, 5; e 5, 12, 13; od in generale come $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$, ove u e v sono degli N_1 (2), che possono rappresentare le misure de' lati di un triangolo rettangolo rispetto alla stessa unità di misura; ed un'altra specie di numeri che possono essere i termini di una proporzione. I Pitagorici finalmente si occuparono delle serie degli N_1 in progressione aritmetica, geometrica, armonica e musicale; le tre prime progressioni sono ben note; invece quattro N_1 si dicono essere in progressione musicale, allorchè sono nel rapporto:

$$a : \frac{2ab}{a+b} : \frac{1}{2}(a+b) : b.$$

15. ***Il quinto secolo a. C.*** — Dopo la morte di Pitagora diversi filosofi greci continuarono a studiare la Matematica; questi filosofi od appartenevano alla sua scuola od erano stati direttamente influenzati da essa; e fra questi si possono ricordare spe-

(1) Nell'epoca greca e molto tempo di poi, i più semplici procedimenti di calcolo e di Aritmetica commerciale furono principalmente perfezionati coll'uso dell'*abaco*. Nella sua forma semplicissima esso consisteva in una tavola di legno, in cui erano incisi de' segni, o di una tavola ricoperta di arena, in cui si tracciavano de' segni colle dita. Per rappresentare un numero si ponevano nel primo segno tanti sassolini o pallottoline quante unità vi erano; se ne ponevano nel secondo tanti quante decine vi erano e così via. In questo modo quindi si poteva contare un numero di oggetti; si poneva sul primo segno un sassolino per ciascun oggetto sino a dieci; in questo caso si toglievano e si poneva un sassolino sul secondo segno e così via; ciò si può fare mediante il pallottoliere. In tal guisa l'abbaco rappresentava in modo concreto un numero nel sistema decimale di numerazione.

(2) Con N_1 indichiamo i numeri intieri.

Digitized by Google

cialmente Enopide, Parmenide, Zeno, Archita, Teodoro, Briso, Antifo ed Ippia quali principali maestri del quinto secolo a. C.

16. ***Enopide da Chio***, nato nel 500 a. C., ha risolto i problemi « di condurre da un punto dato fuori d'una retta data la perpendicolare ad essa (Eucl. I-12), ed in un punto dato costruire un angolo eguale ad un angolo dato (Eucl. I-23) ».

17. ***Parmenide*** e ***Zenone*** da Elea furon celebri per alcune proposizioni paradossali sul moto, particolarmente per il sofisma di Achille e la testuggine enunciata da Zenone, nato nel 495 a. C. Ecco di che cosa si trattava: Quando anche Achille corresse con una velocità dieci volte maggiore di quella di una tartaruga, la quale avesse 1000 m. di vantaggio, tuttavia essa non potrebbe essere mai raggiunta; infatti quando Achille avesse percorso 1000 m., che la tartaruga aveva di vantaggio su lui, la tartaruga sarebbe ancora 100 m. innanzi; Achille percorrerebbe anche questi 100 m.; ma la tartaruga sarebbe ancora 10 m. innanzi a lui, e così via; talchè Achille si avvicinerebbe di più in più alla tartaruga senza però mai raggiungerla; ciò è evidentemente falso.

18. ***Archita*** da Taranto intorno al 400 a. C. fu riconosciuto come il capo della scuola pitagorica. Inoltre si crede che egli abbia applicato la Geometria allo studio delle quistioni di meccanica; però non esiste ora nessun lavoro suo su questo argomento; egli è assai probabile che in una tale opera Archita sia caduto nello stesso errore comune ai Greci, cioè di non basarsi sufficientemente sui risultati di osservazione e di esperienza. Archita è noto ancora per la soluzione geometrica, che diede di uno dei più famosi problemi dell'antichità, cioè « *Di trovare lo spigolo di un cubo, di cui il volume sia doppio di quello di un cubo dato* ». In esso egli fece uso di curve gobbe e mostrò che conosceva le proposizioni 18, III; 35, III; 19, XI di Euclide.

19. Un altro matematico della stessa epoca, che apparteneva alla scuola pitagorica fu *Teodoro* da Cirene, il quale si crede abbia dimostrato geometricamente che i numeri rappresentati

Digitized by Google

da $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ sono incommensurabili coll'unità.

20. I contemporanei di Teodoro, *Briso* ed *Antifo*, sono noti per i tentativi che fecero per trovare l'area di un cerchio, considerandolo come il limite di un poligono regolare inscritto con un numero grandissimo di lati.

21. Finalmente si può ricordare *Ippia* da Elea, che inventò la curva detta *quadratrice* (1), mediante la quale si può trisecare un angolo qualunque o dividerlo in un rapporto dato.

22. ***Origine della scuola ateniese.*** — Verso la fine del quinto secolo a. C. Atene divenne, per molteplici cause, il centro principale degli studî matematici e la città più opulenta della Grecia, in parte mediante il commercio, in parte mediante l'appropriazione, che per deliberato proposito fece dei contributi dei suoi alleati, ed in parte pel genio dei suoi uomini di Stato, che ne fecero il centro della vita politica di tutta la penisola.

Inoltre, mentre qualche Stato contendeva ad Atene la supremazia politica, tuttavia la sua prevalenza intellettuale fu da tutti riconosciuta, e non vi fu in quell'epoca nessuna scuola di filosofia, che non fosse rappresentata in Atene quasi sempre da uno o più de' suoi principali pensatori. La storia della scuola di Atene incomincia verso il 420 a. C. coll'insegnamento di Ippocrate; le sue basi furono saldamente gettate coi lavori di Platone e di Eudosio; ed unitamente alla vicina scuola di Cizico, che fu fondata da Eudosso ed intimamente legata a quella di Atene, essa continuò ad allargare il suo campo, seguendo le linee tracciate da questi geometri, fino alla fondazione (intorno al 300 a. C.) dell'Università di Alessandria, attirandovi gran parte degli ingegni di Grecia.

23. ***Ippocrate*** (2), *circa il 420 a. C.* — Ippocrate fu un mercatante di Chio, nato circa il 470 a. C. che si era recato in Atene

(1) Vedi Appendice 2ª in fine.

(2) Da non confondersi col suo contemporaneo *Ippocrate di Cos*, il celebre medico.

Digitized by Google

circa il 430 a. C. per poter ricuperare una proprietà, che gli era stata usurpata da alcuni cittadini di quella metropoli. Sembra che in tale questione fosse caduto in errore; mentre egli proseguiva nella lite, dava qualche lezione; e finalmente forse per campare la vita, aprì una scuola di Geometria.

24. Ippocrate fu il primo a scrivere un libro di Geometria; e credesi che in esso s'incominciasse per la prima volta ad usare le lettere per indicare i punti di una figura e vi si richiamasse l'attenzione sul metodo di ricondurre un teorema ad un altro già dimostrato; così ne conseguiva necessariamente la verità proposta; il *metodo di riduzione all'assurdo* (reductio ad absurdum) ne sarebbe un caso particolare.

Si può dire che egli abbia creato la Geometria del cerchio (ciclometria), infatti scoprì che i segmenti simili di un cerchio contengono angoli eguali, che l'angolo sotteso da una corda di un cerchio è maggiore, eguale o minore di un angolo retto, secondo che il segmento del cerchio, che lo contiene, è minore, eguale o maggiore di un semi-cerchio (Eucl. III, 31); e probabilmente parecchie altre proposizioni del III libro di Euclide, come le proposizioni che i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri (Euclide XII-2), e i segmenti simili stanno fra loro come i quadrati delle loro corde.

25. Le più importanti scoperte di Ippocrate ebbero origine dallo studio del problema della *quadratura del cerchio* e di quello della *duplicazione del cubo;* e per l'influenza da lui esercitata, questi problemi rappresentano una parte importante nella storia della scuola ateniese.

26. La quadratura di un cerchio, cioè la costruzione di un quadrato, la cui area è eguale a quella di un cerchio, non è possibile eseguirla colla geometria elementare; però Ippocrate nei suoi tentativi, necessariamente vani, per trovare una soluzione di questo famoso problema, scoprì diversi teoremi riguardanti le *lunule*, i quali sono assai interessanti, perchè rappresentano i primi casi, in cui si determinano le aree limitate da curve. Eccone un esempio. Sia ABC un triangolo isoscele inscritto nel

Digitized by Google

semi-cerchio ABOC, il cui centro è O e BC il diametro; su AB ed AC come diametri si descrivano due semi-cerchi dalle bande opposte di AB ed AC rispetto al centro O; sicchè si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \text{ (Eucl. I, 47);}$$

perciò pel XII, 2 di Euclide ho:

area $\frac{1}{2}$ cerchio su BC = somma delle aree dei semi-cerchi su AB ed AC; togliendo via le parti comuni abbiamo:

area Δ ABC = somma delle aree delle lunule su AB ed AC; onde l'area di una di queste lunule è uguale alla metà di quella del triangolo ABC.

27. L'altro problema, di cui Ippocrate si occupò particolarmente, fu quello della duplicazione del cubo, cioè di determinare lo spigolo di un cubo, il cui volume sia doppio di quello di un cubo dato. Egli lo ricondusse a quello di trovare due medie fra un segmento rettilineo a ed un altro di lunghezza $2a$; se queste medie sono x ed y, si ha:

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

da cui si ricava:

$$x = 2a^3.$$

28. ***Platone*** *429-348 a. C.* — Platone è il primo filosofo della scuola ateniese, di cui dobbiamo qui discorrere brevemente. Dopo la morte di Socrate nel 399 a. C. Platone viaggiò per alcuni anni e studiò matematiche nelle scuole pitagoriche; ritornò in Atene verso il 380 a. C., ove creò una scuola sua propria in un ginnasio suburbano chiamato « l'*Accademia* ». Platone come Pitagora fu più filosofo che matematico: egli ritenne che il segreto dell'universo si dovesse ricercare nel numero e nella forma; onde fece dello studio della Geometria o di qualche altra scienza esatta un preliminare indispensabile a quello della filosofia; nel sommo della porta della scuola di Platone vi erano queste parole: « *Chi non sa la Geometria non varchi questa por-*

S. I. BIBLIOTECA DI FILOSOFIA UNIVERSITÀ DI ROMA
Digitized by Google

ta »; e si dice che una volta negasse ad un giovane l'ammissione alla sua scuola, perchè egli non sapeva la Geometria.

29. Probabilmente devesi a Platone se in seguito i geometri incominciarono a esporre la Geometria facendola precedere da una accurata serie di definizioni, di postulati e di assiomi; fu Platone, che elevò a sistema i metodi adoperati per risolvere le questioni di Matematica, e particolarmente richiamò l'attenzione sul metodo analitico.

Questo metodo di dimostrazione incomincia col supporre che il teorema sia dimostrato od il problema sia risolto, e di qui deduce qualche risultato; se questo è falso, allora il teorema non è vero od il problema non si può risolvere; se il risultato è noto per vero o se ciò, che si è ottenuto è ammissibile, si ottiene (coll'invertire ciò che si è ottenuto) una prova sintetica; ma se ciò che si è ottenuto non è reversibile, allora non si può trarre alcuna conclusione.

30. Ecco un teorema attribuito a Platone: « Se CAB e DAB sono due triangoli rettangoli, aventi il cateto AB in comune e gli altri cateti AD e BC paralleli e le loro ipotenuse AC e BD perpendicolari fra loro, che si tagliano in P, si ha: $PC : PB = PB : PA = PA : PD$ ».

Questo teorema fu impiegato nel problema della duplicazione del cubo; infatti se questi triangoli possono essere costruiti, avendo $PD = 2PC$, detto problema è risolto; poichè è facile fabbricarsi un istrumento, con cui si possano meccanicamente costruire detti triangoli.

31. ***Eudosso,*** *408-355 a. C.* — Poco conosciamo di questo terzo grande matematico della scuola di Atene; di Eudosso sappiamo soltanto che studiò sotto i Pitagorici e fu il fondatore della scuola di Cizico; e pare che le sue opère siano state assai importanti.

32. Eudosso scoprì gran parte delle proposizioni contenute nel V libro di Euclide e ne diede le dimostrazioni, che sono in esso. La divisione di una retta in media ed estrema ragione è

Digitized by Google

stata eseguita nel libro II-11 di Euclide; Eudosso stabilì i teoremi riguardanti tale divisione, i quali furono riportati da Euclide al principio del XIII libro. Inoltre Eudosso fondò « il *metodo delle esaustioni* », il quale dipende dalla proposizione che « Se dalla maggiore di due grandezze diseguali si prende più della sua metà, e dal rimanente più della sua metà e così via, allora rimarrà una grandezza minore dell'ultima delle grandezze date (Eucl. X-1.) ». Mediante questo teorema gli antichi poterono evitare l'uso degli infinitesimi. Questo metodo è certamente rigoroso, ma poco pratico e poco fecondo; un esempio dell'uso di esso si trova nella dimostrazione data da Euclide in XII-8, cioè: « Che il quadrato del raggio di un cerchio sta al quadrato del raggio di un altro cerchio, come l'area del primo cerchio sta ad un'area, che non è nè minore, nè maggiore dell'area del secondo cerchio, e può quindi essere eguale esattamente ad essa ». La dimostrazione di questo teorema è stata data da Euclide col solito *metodo di riduzione all'assurdo*. Eudosso applicò questo metodo per dimostrare, che il volume di una piramdie (o di un cono) è un terzo di quello del prisma (o di un cilindro) della stessa base e della stessa altezza (Eucl. XII, 7 e 10).

33. *Eudosso* costrusse anche un *planetario* e scrisse un *Trattato di Astronomia*, nel quale ammise l'ipotesi che il sole, la luna e le stelle fossero attaccati rispettivamente a sfere mobili, le quali col loro moto di rotazione producevano precisamente i fenomeni osservati; e immaginò in tutto ventisette di queste sfere. In seguito le osservazioni divennero più accurate, ed allora gli astronomi, che accettarono questa teoria delle sfere mobili, per accordare vie meglio la teoria coi fatti, ammisero nuove sfere.

34. **Menecmo,** *circa 375-325 a. C.* — Menecmo fu un discepolo di Eudosso e probabilmente gli successe come capo della scuola di Cizico; egli godè come insegnante grande fama; onde fu nominato professore e tutore di Alessandro il Grande. È celebre la risposta, che egli diede al suo allievo, quando lo richiese di fare le dimostrazioni più brevi; egli gli fece osservare, che, quantunque nel paese vi fossero vie private ed anche vie regie, in geometria però vi è solo una via per tutti.

Digitized by Google

Menecmo fu il primo a studiare le sezioni coniche, che per lungo tempo furono chiamate le *triadi menecmiane;* le divise in tre classi e ne studiò le loro proprietà, segando un cono con diversi piani; dimostrò che la sezione di un cono retto con un piano perpendicolare ad una generatrice è un'ellisse, se il cono è acutangolo, una parabola se è rettangolo, un'iperbole se esso è ottusangolo.

Egli indicò pure come si potevano adoperare le coniche per risolvere nei due modi noti il problema della duplicazione del cubo. Nel primo fece vedere che due parabole coi vertici in comune e cogli assi perpendicolari, e tali che i loro parametri siano l'uno doppio dell'altro, s'intersecano in due punti, uno dei quali ha l'ascissa (o l'ordinata), che è una soluzione di detto problema. Infatti, impiegando l'analisi, se le equazioni delle due parabole sono

$$y^2 = 2ap \text{ ed } x^2 = ay,$$

esse s'intersecano in un punto, la cui ascissa è data da $x^3 = 2a^3$.

È probabile che questo metodo fosse stato suggerito dalla forma, con cui Ippocrate aveva posto il problema, cioè di trovare x ed y in modo che:

$$a : x = x : y = y : 2a;$$

d'onde: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$.

Il secondo metodo era quasi identico; esso consisteva nel trovare i punti d'intersezione di una parabola e di una iperbole retta.

35. ***Aristeo e Teatete.*** — Fra gli altri componenti di queste scuole sono degni di essere menzionati Aristeo e Teatete. Le loro opere sono andate perdute; però si sa che Aristeo scrisse intorno ai cinque solidi regolari e alle sezioni coniche, e Teatete studiò la teoria delle grandezze incommensurabili. Il solo teorema che possiamo sicuramente attribuire a Teatete è quello dato in Euclide X-9, cioè « Che i quadrati costruiti su due rette commensurabili stanno fra loro come i quadrati di due numeri ed inversa-

Digitized by Google

mente; ma i quadrati costruiti su due rette incommensurabili hanno fra loro un rapporto, che non può essere espresso come quello dei quadrati di due numeri ed inversamente ».

36. ***Fine della scuola ateniese.*** — I contemporanei ed i successori dei Matematici più sopra menzionati scrissero alcuni Trattati nuovi sugli Elementi di Geometria e sulle sezioni coniche, studiarono i problemi riguardanti la ricerca dei luoghi geometrici, portarono efficacemente avanti il lavoro iniziato da Platone col rendere sistematica la scienza già acquisita, ma non crearono nuovi metodi di ricerca.

37. ***La prima scuola alessandrina.*** — Il primo tentativo di fondare un'università, secondo il concetto moderno, fu fatto ad Alessandria. Alla morte di Alessandro il Grande nel 323 a. C. ed alla divisione del suo impero Tolomeo s'impadronì dell'Egitto e scelse Alessandria come capitale del suo regno; la sua politica vi attrasse molti dotti, e così potè fondare un'università vicina alla sua reggia; egli la provvide largamente di ampie aule. Inoltre dotò la città di ricche biblioteche, musei, laboratori, giardini con ogni maniera di piante, di tutte le macchine che genio umano avesse ideato; onde essa divenne la metropoli della scienza greca e tale si conservò per oltre mille anni. Dei suoi ordinamenti interiori e della sua disciplina si conosce ben poco; ma sappiamo che durante il primo secolo della sua esistenza fu assai fortunata di avere tra le sue mura i tre più grandi Matematici dell'antichità: Euclide, Archimede ed Apollonio, i quali tracciarono i confini entro cui fu poi studiata la Matematica. Si deve senza dubbio alla loro grande influenza, se Alessandria fu per la storia delle Matematiche il centro più importante fra tutti gli altri fino alla distruzione di essa da parte degli Arabi, avvenuta nel 611 d. C; e per tali ragioni le scuole di Alessandria comprendono comunemente tutti i matematici greci della loro epoca.

38. ***Euclide,*** *circa 330-275 a. C.* — Conosciamo ben poco della vita di Euclide; si sa che è di origine greca; probabilmente studiò in Atene; insegnò nell'università di Alessandria dall'epoca

Digitized by Google

della sua fondazione circa l'anno 300 a. C. fino alla sua morte. Si può attribuire tanto ad Euclide quanto a Menecmo il detto, che in Geometria non àvvi una via reale; ma ciò è una mera asserzione; si dice pure che Euclide sostenesse che la scienza acquista valore per il fine cui mira; e si racconta che allorquando un giovinetto, come ebbe incominciato lo studio della Geometria, domandò; « Coll'imparare tutte queste bagatelle che guadagno io? ». Euclide gli fece dare dal suo schiavo alcune monete di rame dal momento disse, che egli deve trarre un guadagno da ciò che impara. Gli scrittori arabi, che forse possono meglio degli altri tramandare a noi le tradizioni di Alessandria, lo rappresentarono come un nobile e gentile vegliardo.

Euclide scrisse molte opere; ma egli deve principalmente la sua fama ai « *Suoi Elementi* », i quali contengono un'esposizione sistematica delle principali proposizioni della Geometria elementare, escluse le sezioni coniche e la teoria dei numeri. Questo Trattato fu subito adottato dai Greci come il libro classico per lo studio delle matematiche pure. Il X libro sembra che sia tutto di Euclide; una gran parte di questi *Elementi* è una compilazione delle opere dei principali scrittori, quantunque egli ne abbia riordinata la materia e talvolta abbia date dimostrazioni nuove. Il metodo, con cui vi sono dimostrate le proposizioni, è dovuto ad Euclide; esso consiste nello enunciato, nell'ipotesi, nella costruzione, nella dimostrazione e nella conclusione; e così pure è dovuto ad Euclide il carattere sintetico dell'opera, essendo ogni dimostrazione scritta con un procedimento logico di ragionamento, ma senza dare nessun legame al metodo, con cui fu ottenuta.

39. Gli Elementi di Euclide sono così noti, che basta discorrerne appena brevemente. I primi quattro libri ed il sesto si riferiscono alla Geometria piana; nel V si studiano le proporzioni; nei libri XI e XII si studia la Geometria solida. I risultati ottenuti nel V libro si applicano a grandezze qualunque; onde son veri tanto se riguardano numeri, quanto grandezze geometriche. Ciò era familiare ai Greci; così è probabile che essi per esempio sapessero che le proposizioni 28 e 29 del VI libro di Euclide contenevano le soluzioni geometriche delle equazioni quadratiche $a\,x^2 \pm b\,x + c = o$, ove a, b, c sono numeri dati.

Digitized by Google

40. Nei libri VII, VIII e IX Euclide tratta la teoria de' numeri razionali; nel primo di questi egli dimostrò, che se nell'ordinario procedimento della ricerca della massima comune misura di due numeri l'ultimo divisore è l'unità, i numeri dati possono essere primi; d'onde trasse la regola per trovare il M. C. D.; trattò poi delle frazioni; indi studiò i numeri primi, e terminò con alcune proposizioni sul minimo comune multiplo dei numeri. L'VIII libro è principalmente dedicato ai numeri in proporzione continua, ossia in progressione geometrica; nel IX libro continuò lo studio delle progressioni geometriche, vi estese pure la teoria dei numeri primi; vi dimostrò che il numero dei numeri primi è infinito, vi studiò alcune proprietà de' numeri pari e dispari; infine terminò col dimostrare come si ottenga un *numero perfetto*.

41. Nel X libro Euclide studiò le grandezze incommensurabili; siccome i Greci non possedevano i simboli per rappresentare i numeri irrazionali, onde fu costretto di adoperare una rappresentazione geometrica. Incominciò a dimostrare alcuni teoremi sulle grandezze incommensurabili, poi passò a studiare tutti i segmenti rettilinei che possono essere rappresentati con

$$\left(\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}\right),$$

ove a e b sono grandezze commensurabili.

42. Oltre agli *Elementi* Euclide pubblicò due raccolte di problemi di geometria, un libro sulle sezioni coniche, un'opera sul cono e sul cilindro ed un Trattato sui porismi; scrisse pure un'ottica geometrica ed un'Astronomia geometrica. In tutte le sue opere egli tratta sempre di grandezze a preferenza che delle loro misure numeriche.

43. Non è inutile rammentare che Euclide introdusse ne' suoi *Elementi* il metodo di dimostrazione detto di *riduzione all'assurdo*, che consiste a provare che qualunque ipotesi contraria ad una proposizione enunciata conduce a qualche contraddi-

Digitized by Google

zione. Questo metodo è utile sopratutto nelle questioni, in cui l'infinito si presenta sotto forma degli irrazionali, del quale Archimede in parecchie delle sue opere ed Apollonio nel suo IV libro delle coniche hanno fatto un uso assai felice, e da cui i geometri moderni hanno tratto gran partito in quelle questioni, in cui la scienza non era ancora di molto progredita per darne dimostrazioni dirette, le sole che mettono una verità in tutta la sua evidenza e rischiarano e soddisfano assieme lo spirito dell'uomo.

44. Parecchi lavori di Euclide andarono perduti: 1° Quello sulle sezioni coniche, che constava di quattro libri. 2° Un libro sulle superficie curve. 3° Quello dei *Dati* che in parte ci sono pervenuti. 4° Quello de' *Porismi*, ricostruiti dal Simson.

Ecco che cosa è un porisma: « Il porisma è una proposizione, in cui si ammette di poter determinare, ed in cui si determinano effettivamente, certe cose, aventi relazioni note con delle cose fisse e ben conosciute, e con altre variabili all'infinito, queste essendo legate fra loro da una o più relazioni date, che stabiliscono la legge di variazione, cui esse sono sottoposte ».

I libri sulle superficie curve probabilmente trattavano delle superficie di 2° ordine, delle superficie di rivoluzione, e delle sezioni fatte in esse con un piano, come nel cono. I porismi formavano coi *Dati* un complemento degli *Elementi di Geometria*, propri a facilitare gli usi di essi per la risoluzione dei problemi, cioè essi avevano per iscopo di far conoscere i luoghi geometrici.

I porismi secondo lo spirito di Euclide erano in qualche modo le equazioni delle curve; essi dànno la facilità ed il modo di cambiare le coordinate, comprendendo con questa parola tutte le maniere possibili di esprimere una curva con due o più variabili; dunque la dottrina dei porismi non è altro che la *Geometria analitica* degli antichi, la quale non differisce da quella moderna che ne' simboli e ne' procedimenti dell'algebra, dovuti al genio di Descartes.

45. Ecco le definizioni di analisi e sintesi di Euclide.

Analisi. In essa si assume come noto ciò che si domanda, purchè si giunga da qui a qualche verità conosciuta.

Digitized by Google

Sintesi. In essa si assume come noto ciò che è dato, purchè si arrivi da qui alla verità che si domanda.

46. ***Aristarco, 310-250** a. C.* — Aristarco è degno di essere qui ricordato, perchè asserì che il Sole era il centro dell'universo e la Terra girava intorno ad esso. Questa ipotesi, ad onta che colla sua semplice interpretazione spiegasse diversi fenomeni, non fu accettata da molti de' suoi contemporanei. Ma le sue proposizioni sulle dimensioni e le distanze del Sole e della Luna in sostanza erano esatte, quantunque le misure poco accurate, su cui si fondavano, ne viziassero i risultati numerici; i quali, ciò non ostante, erano in generale accettati come approssimativamente esatti; calcolò che la distanza dal Sole fosse circa 5×10^9 stadi.

47. ***Archimede, 287-212** a. C.* — Le opere di Aristarco e degli altri matematici di quell'epoca furono superate da quelle del grande Archimede, il cui genio matematico, veramente meraviglioso, fu eguagliato e forse superato soltanto da quello di Newton. Archimede secondo Plutarco era parente della famiglia reale di Siracusa, secondo Cicerone di nascita bassa; egli studiò in Alessandria; ma come ebbe compiuti i suoi studî, ritornò in Sicilia, ove passò tutta la sua vita.

48. Come Platone, Archimede ritenne che il filosofo non avesse alcun dovere di applicare la scienza agli usi ordinari; tuttavia egli fece numerosissime invenzioni. Molti lettori ricorderanno la storia della corona d'oro e quella degli specchi ustori, impiegati per distruggere le navi romane, che bloccavano Siracusa. Non tutti però sapranno che Gerone aveva costruito una nave sì grande, che non poteva giungere a riva; allora egli ricorse ad Archimede, che vinse la difficoltà mediante ruote dentate, costruite con una vite continua; si conta pure che in tale occasione Archimede per ingraziarsi Gerone fece l'osservazione ben nota: « *Datemi un punto d'appoggio, ed io colla leva solleverò la Terra* ».

49. Tutti i Matematici sapevano che la vite archimedea era un'invenzione di Archimede; essa consiste in un tubo aperto

Digitized by Google

alle due estremità e ripiegato a forma di spirale simile ad un cava-turaccioli; se una estremità di essa è immersa nell'acqua e se la si fa girare sul suo asse, che deve essere inclinato sulla verticale di un angolo maggiore del passo della vite, allora l'acqua sale lungo il tubo ed esce dall'altra estremità; essa fu adoperata in Egitto per asciugare i campi dopo le inondazioni del Nilo, e fu impiegata anche dagli antichi per togliere l'acqua dal fondo delle navi.

50. Archimede immaginò poi le catapulte, che per molto tempo tennero a bada i Romani durante l'assedio di Siracusa; esse erano costruite in modo da potere essere disposte come si voleva; così potevano essere scaricate agevolmente senza esporre l'esercito al pericolo del nemico; così esse si dimostrarono tanto efficaci che l'assedio fu cambiato in blocco, e trascorsero ben tre anni prima che Siracusa fosse presa (212 a. C.).

51. Archimede venne ucciso durante il sacco della città, il quale avvenne dopo la sua caduta, ad onta che si fosse ordinato di risparmiare la casa e la vita di sì grande uomo. I Romani rispettando i suoi desideri lo seppellirono nella sua tomba, ove come iscrizione era stata scolpita una sfera inscritta in un cilindro, per rammentare che egli aveva asserito che il volume della sfera è uguale ai due terzi di quello del cilindro retto circoscritto ad essa e la sua superficie a quattro volte l'area di un cerchio massimo.

52. Non è agevol cosa discorrere brevemente delle opere e delle scoperte di Archimede, perchè specialmente esse riguardano tutti i rami delle Matematiche conosciute in quell'epoca, perchè ancora i suoi scritti consistono in una serie di Memorie diverse; tuttavia limitandoci alle opere ancora esistenti, possiamo ricordare:

1ª) *Il suo trattato sulla misura del cerchio.* In esso egli dimostrò che l'area di un cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono rispettivamente eguali al raggio a ed alla circonferenza del cerchio, cioè essa è uguale a $\frac{1}{2}$ a (2 π a). Dimostrò poi che $\pi a^2 : (2a)^2 = 11 : 14$ molto

Digitized by Google

approssimatamente, e quindi che π è minore di $3 + \frac{1}{7}$ e maggiore di $3 + \frac{10}{71}$. Per ottenere tali limiti egli inscrisse e circoscrisse ad una circonferenza poligoni regolari di 96 lati, ne calcolò i loro perimetri e suppose che la circonferenza del cerchio fosse compresa fra essi. Questi risultati naturalmente furono dimostrati geometricamente; questo fu il primo esempio di un problema risolto per approssimazione.

2ª) *La quadratura della parabola.* In questa Archimede stabilì alcune proprietà delle coniche, ed in particolare trovò l'area determinata da una corda in una parabola.

3ª) *Un' opera sulle spirali rappresentate dall' equazione* $r = c\,\theta$.

In questa sono studiate gran parte delle loro proprietà.

4ª). *La sua sfera e cilindro.*

In questa, che egli considerò come la sua opera principale, determinò la superficie ed il volume di una piramide, di un cono e di una sfera, così pure delle figure generate dalla rotazione de' poligoni inscritti in un cerchio intorno ad un suo diametro.

5ª) *L'opera sui conoidi e sferoidi.* In essa studiò le quadriche di rivoluzione e ne ricercò i loro volumi.

6ª) *Archimede scrisse due Memorie sull'aritmetica.* La prima, che è andata perduta, aveva per oggetto la scelta di un conveniente sistema di numerazione, col quale i numeri di qualunque grandezza si potessero rappresentare con una specie di notazione decimale. La seconda Memoria fa vedere come si possa scrivere un numero qualunque per quanto grande esso sia; e per illustrare la potenza del suo metodo trovò un limite superiore al numero dei granelli di sabbia, che potrebbero riempire l'intiero universo, vale a dire una sfera, di cui il centro è la Terra, ed il raggio la distanza del Sole, per la quale accettò quella calcolata da Aristarco; questo limite è minore di 10^{63}. Probabilmente questo sistema fu proposto meramente come una semplice curiosità.

7ª) *La sua meccanica è un'opera sulla statica,* la quale tratta particolarmente dell'equilibrio delle lamine piane e delle proprietà de' loro baricentri.

8ª) *La sua opera sui corpi galleggianti* fu il primo tentativo

Digitized by Google

di applicare il ragionamento matematico alla idrostatica; come egli richiamasse l'attenzione su questo soggetto è ricordato da Vitruvio. Gerone, re di Siracusa, aveva consegnato molt'oro ad un orafo, perchè ne facesse una corona; la corona fu fatta e del peso voluto e consegnata al re; ma nacque il sospetto che l'artefice si fosse appropriato parte dell'oro datogli, sostituendolo con egual peso di argento. Archimede venne consultato su ciò; poco dopo trovandosi nel pubblico bagno osservò che il suo corpo riceveva una spinta dal basso in alto uguale ad una forza, che cresceva a misura che egli vie più maggiormente si immergeva nell'acqua; egli subito riconobbe il valore della osservazione, balzò fuori dal bagno ed attraversando le vie, nudo com'era, corse a casa gridando: Eureca, Eureca! ossia l'ho trovato, l'ho trovato! Stando all'ultima storia su ciò, pare che egli facesse accurati esperimenti e trovasse che quando eguali pesi di oro e di argento si pesavano nell'acqua, essi non apparivano più dello stesso peso; ciascuno sembrava più leggero di prima, precisamente di un peso eguale a quello dell'acqua che spostava; e siccome l'argento aveva maggior volume dell'oro, il suo peso era vie più diminuito. Perciò se egli poneva sul piatto di una bilancia la corona e sull'altro un egual peso di oro, e poi immergeva il tutto nell'acqua, il peso dell'oro avrebbe superato quello della corona, se nella sua fabbricazione fosse stato impiegato anche l'argento. La tradizione dice che l'orafo fu trovato in frode.

53. Non è superfluo il ricordare che Archimede inventò il metodo dell'*esaustioni*, il quale consiste nel ritenere il cerchio (od una curva) come il limite dei poligoni inscritti e circoscritti.

Ad illustrazione del genio di Archimede ricorderemo ancora che la Statica si fondò sulla sua teoria della leva fino al 1586, allorchè Stevino pubblicò il suo Trattato su di essa; e nessun progresso fu fatto nella idrostatica prima che ebbe veduta la luce quest'opera, in cui egli studiò le leggi, che governavano le pressioni dei fluidi. Archimede nell'evo antico e medio fu universalmente riconosciuto come il primo de' matematici, e forse come si è già detto nell'evo moderno solo Newton può considerarsi a lui eguale o superiore.

Digitized by Google

54. ***Apollonio**, circa 260-200 a. C.* — Un altro grande matematico del terzo secolo a. C. fu Apollonio da Perga. Ben poco conosciamo della sua vita; si sa che studiò in Alessandria per molti anni e probabilmente vi insegnò per qualche tempo; andò a Pergamo, ove era stata fondata una università simile a quella di Alessandria; infine ritornò in Alessandria, ove soggiornò il rimanente della sua vita; e morì quasi contemporaneamente ad Archimede. Egli viene descritto come vanitoso, geloso dell'altrui fama, e pronto a cogliere ogni occasione per abbassare gli altri.

55. Nel suo gran Trattato sulle sezioni coniche geometriche egli studiò compiutamente le proprietà di queste curve tanto da lasciare ai suoi successori ben poco da aggiungere su esse. Quest'opera fu subito riconosciuta come il libro classico su questo argomento, la quale aveva completamente superato i Trattati di Menecmo, Aristeo ed Euclide; essa era divisa in otto libri. Apollonio non ebbe alcuna idea della direttrice, nè si avvide che la parabola aveva un foco; ma eccezione fatta pei teoremi che implicano queste nozioni, i primi tre libri contengono gran parte delle proposizioni, che trovansi nelle opere moderne. Nel quarto libro egli studia la teoria delle linee tagliate armonicamente e tratta dei punti d'intersezione dei sistemi di coniche. Nel quinto libro egli incomincia colla teoria dei massimi e dei minimi, e l'applica a trovare il centro di curvatura in ciascun punto di una conica e la evoluta della curva; studia il numero delle normali, che possono essere condotte da un punto ad una conica. Nel sesto libro egli tratta delle coniche simili; nel settimo ed ottavo libro studia i diametri coniugati. La esposizione prolissa e tediosa di questo libro lo rende poco accetto alla maggior parte dei moderni lettori; ma l'ordine logico e razionale in esso è inappuntabile, e giustamente è stato designato come la corona della geometria greca. Egli fu il primo a considerare le coniche come sezioni fatte con un piano in un cono a base circolare, e fu il primo a indicarle coi nomi di *ellisse*, *iperbole* e *parabola*.

56. Oltre a questa grande opera Apollonio scrisse numerosi Trattati su problemi speciali di geometria e così pure parecchie Memorie sull'aritmetica; applicò nel suo *Almagesto* la Geometria all'Astronomia, e scrisse nella Statica intorno alla vite ecc.

Digitized by Google

57. ***Confronto de' metodi di Archimede ed Apollonio.*** — Innanzi tutto si può osservare che i metodi adoperati da Archimede e da Apollonio sono aspramente combattuti. Archimede risolvendo il problema della quadratura delle aree curvilinee gettò i principî della geometria metrica; ciò diede naturalmente origine al calcolo infinitesimale; infatti il metodo delle esaustioni, come fu usato da Archimede, non differisce nel principio dal metodo de' limiti, come venne adoperato da Newton. D'altra parte Apollonio studiando le proprietà delle sezioni coniche mediante le trasversali, che richiedevano la considerazione del rapporto delle distanze rettilinee e della prospettiva, gettò le basi della geometria di forma e di posizione.

58. ***Eratostene***, *275-194 a. C.* — Fra i contemporanei di Apollonio si può ricordare Eratostene, che fu bibliotecario e direttore della biblioteca di Alessandria sotto Tolomeo III. Fu egli che suggerì il Calendario, ora noto come Giuliano, in cui ogni quarto anno contiene 366 giorni, e determinò la obliquità della eclittica in 23° 51′ 20″; ma è più noto come geografo. Misurò la lunghezza di un grado di meridiano sulla superficie della Terra, calcolandola circa 79 miglia; esso è più lungo del vero di circa 10 miglia; poi calcolò che la circonferenza della terra è 252 mila stadi; onde se si considera lo stadio olimpico di iarde 202 $^1/_4$, equivale a dire che il raggio è 4600 miglia all'incirca. Della sua opera matematica esistono due esempi: l'uno è la descrizione di un istrumento per la duplicazione del cubo, l'altro è la regola che egli diede per la formazione di una tavola di numeri primi, detta crivello di Eratostene. (1)

59. ***Il secondo secolo prima di Cristo.*** — Il 2° secolo prima di Cristo rappresenta l'epoca più famosa nella storia delle matematiche greche; ma gran parte de' Matematici di questo secolo si occupò quasi esclusivamente di Geometria; però i loro predecessori immediati non ci hanno in proposito tramandato notizia alcuna. Verso la fine dell'ultimo secolo troviamo due Matematici che volsero i loro studî ad altri rami della Matematica e li fecero di molto progredire: essi furono Ipparco ed Erone.

(1) L'oftalmia, piaga, allora come oggi, della valle del Nilo, gli fece perdere la vista; e non volendo più vivere, mentre non poteva più leggere, si uccise nel 194 a. C.

Digitized by Google

60. ***Ipparco**, circa 120 a. C.* — Ipparco fu il più grande degli Astronomi greci ed il fondatore dell'Astronomia di posizione. Le sue osservazioni ed i suoi calcoli furono ancora molto più accurati di quelli precedentemente pubblicati; per esempio egli determinò la durata dell'anno approssimata al suo vero valore a meno di sei minuti.

60. Ipparco per ispiegare il movimento della Luna suppose che essa si movesse con velocità uniforme in un cerchio, e la Terra fosse vicina al centro di questo cerchio; ciò vuol dire che l'orbita è un epiciclo di 1° ordine. La longitudine della Luna ottenuta con questa ipotesi è esatta sino agli infinitesimi di primo ordine per poche rivoluzioni; per ottenerla esatta per un certo tempo suppose inoltre che l'asse degli apsidi progredisca circa 3° al mese, facendo così una correzione per difetto; spiegò in un modo analogo il movimento del Sole. Iniziò una serie di osservazioni, affinchè i suoi successori potessero avere un'idea dei moti planetari, e con grande perspicacia predisse che era perciò necessario di immaginare epicicli di ordine superiore, cioè tre o più cerchi tali, che il centro di ciascun cerchio successivo si mova uniformemente sulla circonferenza del precedente ad esso. Nella Astronomia fino a Copernico non furon fatti ulteriori progressi, benchè i principii posti da Ipparco fossero ampliati e perfezionati da Tolomeo.

61. Tali ricerche naturalmente dovevano dare origine alla Trigonometria, e ad Ipparco devesi l'invenzione di essa. Si sa che egli costruì una tavola di corde e di archi, che in sostanza è identica a quella dei seni naturali; inoltre nella Trigonometria sferica diede alcuni metodi per risolvere i triangoli; ma disgraziatamente le sue opere andarono perdute. Si può anche aggiungere che Ipparco stabilì il concetto di latitudine e di longitudine per determinare la posizione di un luogo qualunque sulla Terra.

62. ***Erone**, circa 120 a. C.* — Il secondo di questi matematici fu Erone di Alessandria, che si può considerare come il fondatore della ingegneria e della geodesia scientifica. Le sue ricerche nelle matematiche pure non hanno grande importanza; rammenteremo che egli dimostrò che l'area di un triangolo è uguale a:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Digitized by Google

ove p è il semi-perimetro ed a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, e ne diede un esempio numerico per un triangolo, i cui lati stanno fra loro come i numeri:

$$13 : 14 : 15.$$

63. ***Il primo secolo avanti Cristo.*** — I successori di Ipparco e di Erone non colsero l'opportunità, che si era loro così presentata, per istudiare nuovi rami, ma ritornarono su quello ben noto della Geometria. Fra i più eminenti di questi più recenti geometri troviamo Teodosio e Dionisodoro, fioriti entrambi circa nel 50 a. C. Nel 30 a. C. il governo d'Egitto passò definitivamente nelle mani dei Romani. Negli ultimi anni della Dinastia de' Tolomei e ne' primi anni dell'occupazione romana in Egitto regnò un gran disordine civile e politico; gli studî naturalmente nella università furono interrotti; generalmente si usa di considerare questo periodo come la fine della prima scuola alessandrina.

64. *La seconda scuola alessandrina.* — Quantunque le scuole di Alessandria pur esse risentissero non poco danno prodotto dai disordini che travagliavano il mondo romano in quell'epoca di passaggio brusco dalla repubblica all'impero, tuttavia l'insegnamento nella Università non fu mai abbandonato; e come l'ordine fu ristabilito, gli studenti ancora una volta incominciarono ad affluire da ogni parte ad Alessandria. In quest'epoca di grande confusione si incominciarono tuttavia a cambiare le vedute allora prevalenti in filosofia, le quali fino a quel tempo erano generalmente o neo-platoniche o neo-pitagoriche; quest'epoca si considera generalmente come l'inizio di un nuovo periodo.

65. ***Il primo ed il secondo secolo dopo Cristo*** (1). — Durante il primo secolo dopo Cristo la Geometria fu lo studio favorito dai Matematici; ma allora fu riconosciuto che la Geometria di Archimede e di Apollonio non era atta a maggiore ed ulteriore sviluppo. I Trattati, che furono scritti in quest'epoca, con-

(1) Da qui innanzi tutte le date si debbono prendere come *anno domini*, a meno che non dicasi espressamente il contrario.

Digitized by Google

sistevano generalmente in commenti delle opere del periodo precedente, mentre il metodo di trattare la scienza de' numeri divenne meno rigoroso e più empirico. Il secondo secolo è notevole principalmente per i lavori di Tolomeo.

66. ***Tolomeo.*** — Tolomeo, che morì nel 168, fu autore di numerose opere di Matematica; ma egli deve più specialmente la sua fama ai suoi Trattati sulla Geografia e sull'Astronomia; l'ultimo è « l'*Almagesto* », il quale fu fino a Copernico considerata l'opera classica in tale scienza.

67. L'*Almagesto* è diviso in tredici libri. Il 1° libro è costituito della parte preliminare, ove Tolomeo trattò di Trigonometria piana e sferica, e vi diede una tavola delle corde, cioè de' seni naturali, e la spiegazione dell'obliquità dell'ecclitica; ed in questo libro usò per le misure degli angoli i gradi, i minuti primi ed i minuti secondi. Il 2° libro è dedicato principalmente ai fenomeni dipendenti dalla forma sferica della Terra; in esso osservò che tali fenomeni si spiegherebbero assai agevolmente, se si supponesse che la Terra compiesse in un giorno un intiero giro intorno al proprio asse; ma considerò questa ipotesi come non confermata da fatti noti. Nel 3° libro spiegò il moto del Sole intorno alla Terra per mezzo degli eccentrici e degli epicicli, e nello stesso modo nel 4° e 5° libro trattò il moto della Luna. Il 6° libro tratta della teoria delle eclissi; in esso s'impiega $3 + \frac{17}{120}$ come valore approssimato di π, cioè $\pi = 3{,}1416$. Il 7° ed 8° libro contengono un Catalogo di 1028 stelle fisse determinate coll'indicare quelle, tre o più, che sono sulla stessa retta; probabilmente questo Catalogo fu copiato da Ipparco; in un'altra opera poi Tolomeo aggiunse un elenco di fenomeni siderali annuali. I libri rimanenti son tutti dedicati alla teoria dei pianeti.

68. Si può dubitare che le idee fondamentali, i dati adoperati e la spiegazione del moto apparente del Sole fossero stati tolti da Ipparco; ma egli è certo che le spiegazioni particolareggiate ed i calcoli dei moti della Luna e dei pianeti sono dovuti a Tolomeo. La introduzione degli eccentrici e degli epicicli è stata

Digitized by Google

in seguito messa in ridicolo; ma il loro uso è giustificato, se lo si considera come un conveniente metodo di spiegare fatti noti; esso costituiva una semplice ipotesi, escogitata precisamente per accordarvi tali fatti, ed equivale all'espressione di una data funzione come somma di seni e coseni, metodo usato frequentemente nell'Analisi moderna.

69. Adunque si è detto che Tolomeo col suo Almagesto ha lasciato un Trattato di trigonometria piana e sferica; quello di Ipparco come si sa è andato perduto. Ricorderemo poi che si deve a Tolomeo il teorema di planimetria, che porta il suo nome cioè « Il rettangolo costruito colle diagonali del quadrangolo inscritto in un cerchio è equivalente alla somma dei rettangoli costruiti sui suoi lati opposti ».

70. ***Il terzo secolo.*** — Ipparco e Tolomeo non solo fecero vedere come si possa utilmente applicare la Geometria alla Astronomia, ma mostrarono come possono essere ulteriormente estesi i nuovi metodi di Analisi analoghi alla Trigonometria. Tuttavia nessuno de' loro successori riprese l'opera iniziata sì felicemente da essi, e debbono trascorrere più di 150 anni prima di incontrare un altro geometra di qualche valore.

71. ***Pappo.*** — Pappo visse ed insegnò ad Alessandria circa la fine del terzo secolo; si sa che egli ebbe un gran numero di discepoli, ed è assai probabile per qualche tempo egli ravvivasse gli studî geometrici.

72. Pappo scrisse parecchie opere, ma soltanto una n'è pervenuta a noi, ed è il suo Συναγωγή, una Collezione delle opere matematiche della Grecia, unitamente ai commenti ed alle proposizioni aggiunte dall'Editore. Un confronto accurato delle varie opere esistenti colla storia di esse, dato in questo libro *delle Collezioni matematiche*, mostrerebbe che esso è stato compilato con molta cura, e sul quale possiamo ampiamente fondarci per conoscere le altre opere perdute. Esse non sono ordinate cronologicamente; ma vi sono messe insieme tutte le opere che riguardano una stessa materia; ed è probabile che diano all'ingrosso

Digitized by Google

l'ordine, col quale gli autori classici venivano insegnati ad Alessandria.

73. L'ultima parte *delle Collezioni matematiche* contiene l'opera originale di Pappo. Pare che egli scoprisse il foco della parabola e le direttrici nelle sezioni coniche; ma in entrambi i casi egli studiò solamente poche proprietà isolate; il primo studio veramente compiuto de' fochi fu dato da Keplero e quello delle direttrici da Newton e da Boscovich. Pappo in Meccanica dimostrò che il baricentro di una lamina triangolare è identico a quello di una lamina triangolare inscritta, i cui vertici dividono ciascun lato del triangolo primitivo in uno stesso rapporto; scoprì pure i due teoremi, che compariscono ancora nei libri di testo sotto il suo nome: essi sono: 1° Che il volume generato dalla rotazione di una curva intorno ad un asse è uguale al prodotto dell'area della curva per la lunghezza della traiettoria descritta dal suo baricentro. 2° La superficie è uguale al prodotto del perimetro per la lunghezza della traiettoria descritta dal suo baricentro.

Fra i lavori di Pappo trovasi la descrizione sulla sfera di una linea a doppia curvatura; egli vi diede l'espressione della superficie sferica compresa fra questa curva e la sua base; questo è il primo esempio della quadratura di una superficie curva.

74. ***Il quarto secolo.*** — Durante il II ed il III secolo l'interessamento allo studio della Geometria decadde rapidamente, ed invece crebbe quello della teoria dei numeri. Si rammenterà che Euclide adoperava i segmenti rettilinei come simboli per rappresentare qualunque grandezza; e studiò i teoremi, che riguardavano i numeri, in un modo scientificamente rigoroso; ma limitossi ai casi, in cui era possibile una rappresentazione geometrica. Archimede andò poi più innanzi, ed introdusse i numeri nelle sue discussioni geometriche. Erone abbandonò la rappresentazione geometrica de' numeri; ma siccome nè lui, nè altri scrittori riuscirono ad escogitare nessun altro simbolo conveniente a rappresentare i numeri in generale, questo studio rimase tal quale l'aveva lasciato Archimede.

75. Nel IV secolo tuttavia incominciamo ad incontrare proble-

Digitized by Google

mi, che conducono direttamente all'equazioni algebriche. Ecco un esempio « Democare passò $\frac{1}{4}$ della sua vita nella fanciullezza, $\frac{1}{5}$ nella giovinezza, $\frac{1}{3}$ nell'età matura e consumò gli ultimi 13 anni nella vecchiaia. Quanti anni visse egli? ».

76. È assai probabile che tali problemi venissero risolti col metodo adoperato in simili casi dagli Arabi e da molti scrittori del medio evo. Questo metodo, conosciuto comunemente col nome di *Regola di falsa posizione*, consiste nel supporre un numero qualunque come una quantità incognita e nel verificare se nella riprova sono soddisfatte le date condizioni, nel fare variare il numero mediante una semplice proporzione come nella regola del tre. Ad esempio supponiamo che l'età di Democare sia di 40 anni, poi colle date condizioni egli abbia trascorso 8 anni e $\frac{2}{3}$ invece di 13 nella vecchiaia; onde si ha il rapporto $\left(8+\frac{2}{3}\right)$: 13 uguale al rapporto di 40 alla sua età presente; perciò l'età presente sarebbe di 60 anni.

77. Ma gli scrittori più moderni in questo ramo della scienza opinano che i problemi venissero risolti *coll'algebra retorica*, cioè mediante un procedimento di ragionamento algebrico espresso in parole senza l'uso dei simboli.

78. In questo periodo di decadimento degli studî geometrici e di inizio dello studio dell'*Aritmetica algebrica* apparve solo un algebrista di speciale originalità, Diofanto; il quale v'introdusse un sistema di abbreviazioni per quelle operazioni e per quelle quantità, che frequentemente dobbiamo impiegare; tuttavia nell'usarle osservò tutte le regole della sintassi grammaticale. La scienza che ne risultò fu chiamata *Algebra sincopata*; le dimostrazioni vi erano date con parole per disteso, a meno che le abbreviazioni non siano state adoperate nel testo. Più chiaramente parlando diremo che l'Algebra in Europa non progredì durante quest'epoca e sino alla fine del XVI° secolo. Certamente costituisce un gran progresso nella rappresentazione di una quantità incognita la sostituzione di un'abbreviazione o di un simbolo

Digitized by Google

ad una parola; ed è assai probabile che ciò sia stato fatto molto prima; ma pel poco perfetto sistema di numerazione adottato dai Greci, i quali usavano tutte le lettere dell'alfabeto per denotare numeri particolari, fu impossibile adoperare le lettere per rappresentare un numero qualunque.

79. L'Algebra moderna incominciò a fare grandi passi sulla via del progresso quando divenne intieramente *simbolica;* imperocchè essa ha un linguaggio suo proprio, un sistema di numerazione indipendente dalle cose rappresentate, mentre le operazioni sono effettuate secondo regole diverse dalle leggi della costruzione grammaticale.

80. ***Diofanto,*** *circa il 420.* — Della vita di Diofanto si sa solo che visse ad Alessandria e che forse non era di origine greca.

Egli scrisse un breve saggio sui numeri poligonali, un Trattato di Algebra, che ci pervenne mutilato, ed infine un'opera sui *Porismi*, che andò perduta.

81. Diofanto nei numeri poligonali abbandonò il metodo empirico ed abbracciò l'antico sistema, col quale i numeri si rappresentavano con segmenti rettilinei; in esso, se è necessario, si fa una costruzione e se ne inferisce una dimostrazione rigorosamente deduttiva. Si può notare che egli in questa opera cita le proposizioni 3 ed 8 del II libro di Euclide, come riferentesi a numeri e non a grandezze.

82. La sua opera principale è la sua *Aritmetica*, la quale in realtà è un Trattato di Algebra; in essa sono adoperati i simboli algebrici; le questioni vi sono trattate analiticamente, ammettendovi tacitamente che le varie proposizioni siano reversibili; ed i diversi metodi vi sono adoperati per trovare le soluzioni, benchè il più delle volte soltanto particolari, di parecchi problemi che contengono numeri.

83. Primieramente parleremo della notazione di Diofanto. Egli adoprò un simbolo per rappresentare la quantità incognita nelle sue equazioni; e siccome ne aveva uno solo, non poteva ad un tempo usare più di un'incognita. La quantità incognita comunemente era rappresentata con *s*; al plurale era rappresentata

Digitized by Google

con *ss* o *ss*^{oi}. Il quadrato della incognita si chiamava δύναμις ed era rappresentato da δ^{v} ; il cubo Κύβος ed era rappresentato da Κ^{v} e così via fino alla 6^{a} potenza. I coefficienti della quantità incognita e le sue potenze sono numeri; ed un coefficiente numerico è scritto immediatamente dopo la quantità che esso moltiplica; e così $s\bar{\alpha} = x$, e $ss^{oi}\overline{\iota\alpha} = \varsigma\varsigma\ \overline{\iota\alpha} = 11x$. Un termine assoluto è considerato come un certo numero di unità o μονάδες, che sono rappresentate da μ$^{\delta}$; così μ$^{\delta}\bar{\alpha} = 1$, μ$^{\delta}\overline{\iota\alpha} = 11$. Non àvvi oltre giustapposizione nessun altro segno per l'addizione. La sottrazione è rappresentata da τι e questo segno affetta tutti i simboli che lo seguono. L'eguaglianza è rappresentata da ιτ Così:

Κ$^{\acute{v}}$ $\bar{\alpha}\overline{\varsigma\varsigma\eta}$ τδ$^{\acute{v}}$ $\bar{\epsilon}$ μ$^{\delta}$ $\bar{\alpha}$ ις $\bar{\alpha}$

rappresenta:

$$(x^3 + 8x) - (5x^2 + 1) = x.$$

84. In secondo luogo diremo come Diofanto espose la scienza dell'Algebra. Egli incominciò con alcune definizioni, e dando il segno pel *meno* stabilì che una sottrazione moltiplicata per una sottrazione dà luogo ad un'addizione; con ciò fece vedere che il prodotto di b per d nello sviluppo di $(a - b)$ $(c - d)$ è $+ bd$; ma applicando la regola ebbe cura di scegliere i numeri a, b, c, d in modo, che a fosse maggiore di b e c maggiore di d. Nelle sue soluzioni dei problemi diede le regole per risolvere una semplice equazione di 1° grado ed un'equazione binomia di 2° grado. Probabilmente la regola per risolvere qualunque equazione di 2° grado trovavasi in uno dei libri, che andaron perduti. La maggior parte dell'opera si occupa delle equazioni indeterminate; quando l'equazione è di 1° grado e a due incognite, assume un dato valore per un' incognita, e risolve l'equazione rispetto all'altra.

85. Questo assumere uno special valore per una variabile ed il modo, onde furon scelte le incognite di una forma particolare, rende l'analisi talvolta empirica. Ecco un esempio per illustrare quest' analisi. « Dividere per es. il numero 13, che è la somma dei due quadrati 9 e 4, nella somma di due altri qua-

Digitized by Google

drati ». Egli dice che i quadrati dati 2^2 e 3^2 saranno della forma $(x+2)^2$ e $(mx-3)^2$ come i richiesti; poi suppone $m = 2$, benchè si possa prendere egualmente qualunque altro valore numerico; d'onde ottiene:

$$(x + 2)^2 + (2x - 3)^2 = 13;$$

perciò $x = \frac{8}{5}$; quindi i quadrati richiesti sono $\frac{324}{25}$, $\frac{1}{25}$.

86. Diofanto scrisse pure una terza opera intitolata i *Porismi* che andò perduta. Di essa però abbiamo gli enunciati di alcune proposizioni; fra le più importanti vi erano le seguenti:

1° La differenza di due cubi può sempre essere espressa come la somma di due cubi. 2° Che nessun numero della forma $4n-1$ può essere espresso mediante la somma di due quadrati. 3° Che nessun numero della forma $8n-1$ (o probabilmente $24n+7$) può esprimersi mediante la somma di due quadrati. A queste proposizioni possiamo forse aggiungere anche la seguente: 4° Un numero può esprimersi come un quadrato o la somma di due, di tre o di quattro quadrati.

87. Gli scritti di Diofanto non esercitarono una grande influenza sulle Matematiche greche; ma la sua *Aritmetica* richiamò l'attenzione della scuola araba. Una copia imperfetta dell'opera originale di Diofanto fu scoperta a Roma nel 1462; fu tradotta, in latino da Xylander nel 1575; questa traduzione eccitò l'interesse generale, ma da quell'epoca gli algebristi europei avevano fatti grandi progressi oltre al punto, cui l'aveva lasciata Diofanto.

88. ***Il quinto secolo.*** — Verso la fine del IV secolo il potere sempre crescente della chiesa orientale impedì che cessassero le ostilità contro gli scienziati; e questa persecuzione raggiunse il colmo coll'assassinio di Ipazia in Alessandria nel 415. Dopo questo fatto molti studenti alessandrini si rifugiarono in Atene, ove sino dai tempi di Platone esisteva un piccolo corpo d'insegnanti; ma questi emigrati continuarono il loro lavoro con grandi difficoltà. Finalmente dopo non pochi tentativi i Cristiani

Digitized by Google

ottennero da Giustiniano nel 529 un Decreto, col quale si prometteva che « *la scienza pagana* » non sarebbe più a lungo studiata in Atene.

89. La chiesa in Alessandria era meno influente; e la città era più lontana dal centro del potere civile, talchè anche dopo il trionfo del clero alla fine del IV secolo fu permesso alle scuole di rimanere aperte; ma l'interessamento allo studio delle Matematiche era intieramente spento, mentre le lunghe discussioni dei Cristiani sui dogmi teologici e la crescente incertezza dell'Impero tendevano a fuorviare l'umano pensiero.

90. ***Fine della seconda scuola di Alessandria.*** — La precaria esistenza e l'infruttuosa storia della seconda scuola alessandrina non meritano d'essere ricordate. Nel 632 morì Maometto, e dieci anni dopo i suoi successori avevano soggiogato la Siria, la Palestina, la Mesopotamia, la Persia e l'Egitto. Non si conosce precisamente la data, in cui cadde Alessandria; ma la maggior parte degli storici arabi più accreditati asseriscono che essa sia avvenuta il 10 decembre 641.

91. ***Conservazione delle opere alessandrine.*** — Le più importanti opere degli scrittori di Alessandria furono salvate in due modi. Primieramente dopo la conquista dell'Egitto da parte degli Arabi, alcuni filosofi. che prima vi risiedevano, emigrarono a Costantinopoli, che poscia divenne in Oriente il centro dello scibile greco, e tale si conservò finchè non cadde nelle mani dei Turchi nel 1453.

La storia di questa *scuola bizantina* ha ben poco interesse scientifico; ma essa conservò le opere di vari scrittori alessandrini; e nel XV secolo la scoperta di queste opere diede in occidente un grande impulso allo studio della scienza.

In secondo luogo i conquistatori arabi si valsero assai felicemente della medicina dei Greci: da ultimo questa diede luogo ad una serie di traduzioni in arabo della maggior parte delle opere scientifiche greche, che in quel tempo potevansi procurare, comprese quelle di Matematica. Queste traduzioni si sparsero fino in occidente, come al Marocco ed in Ispagna, e poi esse furono conosciute fino nell'Europa occidentale.

Digitized by Google

CAPITOLO II.

La matematica nel medio evo.

92. La Matematica dell'Europa moderna può descriversi dicendo, che ebbe origine dall'insegnamento crescente e continuo impartito nelle scuole cattedrali e nei monasteri dell'Europa occidentale. Questo insegnamento fu basato in gran parte sulla Matematica attinta alle fonti romane; e questa alla sua volta fu fondata sull'insegnamento dei Greci. Si è già studiato la Matematica greca; sulla romana àvvi ben poco da dire.

93. ***Matematica romana.*** — A Roma non vi fu nessuna scuola propria di Matematica; lo studio principale di Roma fu quello dell'arte di governare ossia delle leggi, quello della fede o di que' mezzi materiali, su cui in sostanza si fonda ogni governo. Inoltre non solo era sfavorevole alla scienza astratta il genio essenzialmente pratico del popolo romano durante la fondazione e la continuazione del suo impero e sotto i Goti, ma lo erano anche le condizioni dell'ambiente stesso. Senza dubbio vi erano professori che insegnavano i risultati della scienza greca, ma non si sentiva il bisogno di aprire una scuola di Matematiche. Quegli Italiani che desideravano di apprendere la scienza al di là degli elementi, si recavano in Alessandria o in que' luoghi che ricevevano la luce d'Alessandria.

Digitized by Google

94. L'insegnamento matematico impartito nelle scuole di Roma pare che generalmente si limitasse all'Aritmetica pratica, la quale senza dubbio veniva insegnata coll'aiuto dell'abaco; e può darsi che si estendesse anche ad alcune delle più facili proprietà dei numeri, a qualche regola pratica di Geometria, e forse agli *Elementi di Euclide*, benchè alcune delle arti, che traggono lor fondamento dalle Matematiche, avessero raggiunto il massimo grado di eccellenza.

95. ***L'istruzione nel VI, VII ed VIII secolo.*** — La storia primitiva della Matematica del medioevo ha ben poco interesse; e sarebbe infatti strano se trovassimo la scienza e le Matematiche studiate da chi viveva in condizioni di perpetua guerra. Possiamo presso a poco dire che dal VI all'VIII secolo i soli centri di studio nell'Occidente di Europa erano i monasteri dei Benedettini, ne' quali si faceva qualche lieve tentativo nello studio della letteratura. Lo studio della Matematica si limitava all'uso dell'abaco, al metodo dei conti esatti ed alla regola mediante la quale si poteva determinare la data della Pasqua. Ciò non deve sorprendere, quando si pensi che il Monaco ha rinunciato al mondo e non àvvi alcuna ragione, che egli apprenda più scienza di quella, che si richiede per i servizi della chiesa e del suo monastero. Intanto le tradizioni della scienza greca ed alessandrina si andarono a poco a poco spegnendo. Probabilmente a Roma ed in qualche altra città favorita si eran potuti procurare, ma a fatica, le copie delle opere dei grandi matematici greci; ma non v'era chi le studiasse; anzi i libri erano tenuti in dispregio; così divennero a poco a poco rari. Si potrebbe ricordare ancora che non vi fu un'attiva opposizione alla scienza, e la chiesa occidentale non mostrò quella severa ostilità ad essa, che era tanto spiccata fra i Cristiani greci ed asiatici.

96. ***Boezio e Cassiodoro.*** — Due soli scrittori, Boezio e Cassiodoro, possono essere ricordati, perchè i loro scritti sono l'anello di congiunzione fra la matematica dei tempi classici e quella de' medioevali.

Di questi due il più grande è Boezio (475-526), che fu l'ultimo romano di qualche fama, che studiò la lingua e la letteratura

Digitized by Google

greca. Le opere di Boezio aprirono all'Europa medioevale uno spiraglio nella vita intellettuale del vecchio mondo; onde la sua importanza nella storia della letteratura è grandissima; ma ciò si deve in gran parte ai tempi in cui egli è vissuto. Pubblicò una geometria, che contiene gli enunciati, e questi solí, del I libro di Euclide e di poche proposizioni scelte del III e IV libro, unitamente a numerose applicazioni pratiche per calcolare le aree ecc. Ad essa fu aggiunta un'Appendice, che contiene le dimostrazioni delle prime tre proposizioni per far vedere, che le espressioni che dànno le aree possono essere fondate su di esse. Scrisse anche un'Aritmetica.

Pochi anni dopo *Cassiodoro* studiò il disegno della istruzione liberale, che dopo il *trivium* preparatorio « Grammatica, Logica e Retorica » propose il *quadrivium* « Aritmetica, Geometria, Musica ed Astronomia ».

97. ***Le scuole delle cattedrali e dei conventi.*** — Quando Carlomagno nella seconda metà dell'VIII secolo fondò il suo impero, ordinò che le scuole fossero aperte insieme a quelle cattedrali e conventuali. Non si andrà molto lungi dal vero, se si dirà che l'insegnamento della Matematica, impartito in queste scuole, non andava al di là della Geometria di Boezio, dell'uso dell'abaco e della tavola della moltiplicazione ed anche forse, dell'aritmetica di Boezio; inoltre all'infuori che in queste scuole o nel chiostro benedettino era assai difficile avere l'opportunità di potere studiare. Era ben naturale che le opere usate venissero da fonti romane, imperocchè l'Europa occidentale continuava a riguardare Roma come centro della civiltà, e l'alto clero conservava una certa relazione con questa città.

98. ***L'istruzione nel IX e nel X secolo.*** — Dopo la morte di Carlomagno in molte scuole l'insegnamento della scienza fu negletto, limitandosi ad insegnare in esse solo il latino, la musica e la teologia. Tuttavia queste scuole continuando a vivere, offrivano l'opportunità di studiare a tutti que' giovani, il cui amore allo studio eccedeva gli angusti limiti della tradizione; ed infatti il numero di coloro, che desideravano istruirsi, fu sì grande, che un bravo insegnante era quasi sicuro di attirare nella

Digitized by Google

sua scuola un uditorio considerevole. Però in questà scuola raramente s'insegnava la scienza; e quando vi s'impartiva l'insegnamento della Matematica, esso aveva per oggetto quell'Aritmetica necessaria per far di conto, la Musica indispensabile per i servizi chiesastici, la Geometria occorrente per l'Agrimensura, e l'Astronomia sufficiente per determinare le feste e le vigilie della chiesa, e nulla più. Le sette arti liberali, trivium e quadrivium, sono le seguenti: *lingua*, *tropus*, *ratio*, *numerus*, *tonus*, *angulus*, *astra*. Qualunque studente che avesse voluto coi suoi studî andare al di là del trivium, veniva considerato come un uomo di grande erudizione, *Qui tria, qui septem, qui totum scibile novit.*

Le questioni speciali, da cui furono allora e di poi attratti i migliori pensatori, riguardavano la logica e certe parti di filosofia e di teologia trascendentale. A quanto sopra si è detto si può aggiungere che l'insegnamento della Matematica nei secoli IX e X era limitato alla materia contenuta nei due libri di Boezio, unitamente all'uso pratico dell'abaco e della tavola pitagorica, benchè nello scorcio di questo periodo in qualche località l'insegnamento matematico fosse più esteso che altrove.

99. ***Gerberto.*** — Nel X secolo la scienza progredì di molto per opera di Gerberto, che divenne papa nel 999 col nome di Silvestro II; egli stesso scrisse un'Aritmetica, una Geometria, ed un Trattato sull'uso dell'abaco.

100. Gerberto introdusse nell'abaco un miglioramento, notando con un segno distintivo ciascuna delle nove pallottoline in ogni colonna: la 1ª pallottolina con 1, la 2ª con 2 e così via. Questi segni, chiamati *apici*, probabilmente erano di origine araba od indiana, e condussero ad una rappresentazione dei numeri con un sistema identico a quello usato da Gobar, come vedremo in seguito; tuttavia non vi era alcun segno pel numero zero.

101. ***Origine delle università medioevali.*** — Alla fine dell'XI secolo od al principio del XII in molte di queste scuole si verificò un gran risveglio; o meglio si potrebbe forse dire che in alcuni casi i professori, che non erano membri delle scuole fondate vicino alle loro abitazioni, col permesso delle autorità,

Digitized by Google

davano lezioni, le quali di fatto si riferivano quasi sempre alla teologia, alla logica ed al diritto civile. Come gli studenti di questi centri d'istruzione crebbero di numero, fu possibile e si sentì il bisogno di formarne una società; e quando un interesse comune a tutti lo richiedeva, la società così formata era una specie di corporazione o lega commerciale; ciò rappresenta il primo stadio nella storia di un'università medioevale. Se la società aveva fortuna e stabilità, allora i suoi membri in seguito chiedevano il riconoscimento dei privilegi legali, che erano quasi sempre accordati. L'ultimo stadio della università medioevale fu costituito dal riconoscimento della sua esistenza da parte del papa (o imperatore) e di quello dei suoi gradi come titolo per potere insegnare in tutto il mondo cristiano; in tal modo le università vennero strettamente connesse l'una coll'altra.

102. ***L'istruzione delle università medioevali.*** — I giovani erano ammessi nelle università in età assai tenera: non avevano che undici o dodici anni. Non si può dire con precisione come essi venissero divisi in classi, sì rispetto alla loro età, che agli studî che intraprendevano; non si sa quale era la disciplina, cui eran soggetti; si sa solamente che venivano considerati quali scolari, quando frequentavano le lezioni, che vi si impartivano. I primi quattro anni erano dedicati al *trivium*, cioè allo studio della grammatica latina, della logica, e della retorica. La maggior parte degli allievi nei primi tempi non istudiava che grammatica latina; formava una facoltà inferiore ed era solo eleggibile per grado di maestro di grammatica. Quegli studenti, che avevano fatto maggior progresso, ed erano i più, dedicavano gli anni rimanenti al compimento degli studî del *trivium*, alla fine del quale conseguivano il titolo di baccelliere delle arti: ciò voleva dire che uno studente non era più uno scolaro. L'età media, in cui si arrivava ad essere baccelliere, era circa di diciassette o diciotto anni. Un baccelliere non poteva insegnare a' giovani come qualunque altro professore, ma solo con particolari restrizioni; insomma esso potrebbe forse paragonarsi ai nostri giovani licenziati dal liceo o dall' istituto tecnico. Pochi erano i baccellieri che seguitavano gli studî del diritto civile o canonico; i rimanenti assai probabilmente continuavano i loro studî, de-

Digitized by Google

dicandosi alle scienze ed alle Matematiche, il quadrivium, per altri tre anni di seguito; ma effettivamente fino al Rinascimento gran parte di essi consacrava il suo tempo allo studio della logica, della filosofia e della teologia. Il grado di *Maestro delle Arti* o dottore era dato alla fine di questo corso. Nei secoli XII e XIII esso non era che una semplice abilitazione all'insegnamento; nessuno aspirava a questa licenza, se non intendeva di farne uso e rimanere nella università; e solamente quelli, che avevano una disposizione naturale per la carriera dello insegnamento, venivano probabilmente scelti per abbracciare una professione così mal retribuita, come quella del professore, specialmente in Italia. L'allievo conseguiva il grado, allorchè aveva compiuto il corso degli studî e dimostrato, che era di specchiata moralità. Nel XIV secolo gli studenti incominciarono a vedere che un grado accademico aveva un valore pecuniario; onde le università conferivano questo grado solo a condizione, che il nuovo professore risiedesse in esse e v'insegnasse per un anno almeno. Dopo alcun tempo le università fecero su questa via de' passi innanzi, imperocchè esse rifiutavano i gradi a chi non aveva le qualità intellettuali richieste.

103. ***Sviluppo della matematica in India e fra gli Arabi.*** — Siamo ora arrivati all'epoca, nella quale i risultati della scienza araba ed alessandrina erano conosciuti in Europa; quindi ora debbo interrompere la storia delle matematiche medioevali per istudiare lo sviluppo delle scuole arabe della stessa epoca. Onde ora posso far vedere come i teologi scolastici conoscessero e si rendessero familiari i libri arabi e greci, e come ciò influisse di molto sul progresso delle matematiche europee.

103. Fu fondata in India dai conquistatori Arabi una scuola di matematiche di grandissima importanza. La loro Geometria assai probabilmente era stata attinta principalmente da fonti greche; ma erano gran parte di loro creazione l'Aritmetica, l'Algebra e forse la loro Trigonometria. Fra i primi scrittori quelli che meritano di essere specialmente ricordati sono *Arya-Bhata* circa il 500 e *Brahmagupta* circa il 630. La scuola, cui appartenevano questi scrittori, introdusse nell'Aritmetica l'uso del si-

Digitized by Google

stema decimale di numerazione; inventò un'Algebra retorica; l'applicò alla risoluzione delle equazioni e di vari problemi, e fece uso della Trigonometria come scienza ausiliaria dell'Astronomia.

104. Gli Arabi avevano sempre avuto relazioni commerciali coll'India, e naturalmente queste crebbero colla fondazione del loro impero. La introduzione della scienza indiana in Arabia e l'adozione del sistema decimale di numerazione si verificarono alla fine del VII secolo. Molte quindi delle opere scientifiche dei Greci poterono essere facilmente conosciute; e prima della fine del IX secolo sotto la protezione dei Califfi erano state preparate le traduzioni delle opere di Euclide, Archimede, Apollonio, Tolomeo e di altri scrittori di Alessandria.

105. ***Alkarismi.*** — Il primo, e per certi rispetti il più grande dei matematici Arabi, fu *Mohammed ibu Musa Abu Djefar Al-Khwarizmi*, comunemente conosciuto col nome di *Alkarismi*. Circa l' 830 pubblicò un'Algebra, la quale ha una grande importanza nella storia delle Matematiche; imperocchè le successive opere di Algebra degli Arabi e le prime del medioevo in gran parte furono fondate su quella di *Alkarismi*. L'Aritmetica e l'Algebra del medioevo, a cui condusse quest'opera, era comunemente conosciuta col nome di *algoritmo*. La parola era *Al-gebr we 'l mukabala: al-gebr*, da cui è derivata la parola Algebra, può essere tradotta con *restaurazione;* e si riferisce al fatto, che ogni quantità può aggiungersi o togliersi da ambi i membri di una stessa equazione; *al mukabala* significa il procedimento di semplificazione, ed è usato generalmente per indicare la riduzione de' termini simili in uno solo. La quantità incognita si chiama « *la cosa* » o « *la radice di una pianta* », e da quest'ultima è venuto l'uso della parola radice per significare una soluzione di un'equazione. Tutte le quantità note sono numeri, e l'Algebra è retorica.

106. L'opera è divisa in cinque parti: nella prima *Alkarismi* dava senza dimostrazioni le regole per la risoluzione delle equazioni quadratiche; egli considerò solo le radici reali e positive,

Digitized by Google

però riconobbe l'esistenza di due radici, che, come sappiamo, non furono mai avvertite dai Greci. È strano che egli qualche volta, quando le due radici erano positive, prendesse solo quella, che proveniva dal valore negativo del radicale. Poi diede nella seconda parte le dimostrazioni geometriche di queste regole in un modo analogo a quello della proposizione 4 del lib. II di Euclide. Per esempio per risolvere l'equazione $x^2 + 10x = 39$ o qualunque equazione $x^2 + px = q$, usò due metodi, di cui uno è il seguente. Rappresenti AB il valore di x e si costruisca sopra AB il quadrato ABCD; si prolunghi DA fino in H e DC fino in F in modo, che sia AH=CF=5 $\left(\text{o } \frac{1}{2} p\right)$ e si completi il quadrato. Allora le aree AC, HB e BF rappresenteranno rispettivamente x^2, $5x$ e $5x$. Così il 1° membro dell'equazione è rappresentato dalla somma delle aree AC, HB, BF, cioè dal gnomone HCG; ad ambo i membri dell'equazione aggiungiamo il quadrato KG, la cui area è 25 $\left(\text{oppure } \frac{1}{4} p^2\right)$, e si otterà un nuovo quadrato, la cui area è per ipotesi eguale a 39 + 25, cioè a $64\left(\text{o } q + \frac{1}{4} p^2\right)$, ed il cui lato perciò è 8. Il lato di questo quadrato DH, che è uguale ad 8, supera AH, che è uguale a 5, del valore incognito richiesto, che perciò è 3.

Nella terza parte del libro *Alkarismi* considerò il prodotto dei binomi $x \pm a$ e $x \pm b$. Nella quarta parte stabilì le regole per l'addizione e la sottrazione delle espressioni, che contengono l'incognita, il suo quadrato e la sua radice quadrata; diede le regole per calcolare le radici quadrate, e terminò con:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b},$$
$$\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{a . b}.$$

Nella quinta ed ultima parte risolse alcuni problemi come per esempio: « Trovare due numeri, la cui somma è 10 e la differenza dei loro quadrati è 40 ».

Digitized by Google

107. ***Progresso delle scuole arabe.*** — Dopo la morte di *Alkarismi* l'Algebra fece un grande progresso, ma rimase intieramente retorica. I problemi, di cui si occuparono gli Arabi, o riguardavano la risoluzione delle equazioni o conducevano ad esse od alle proprietà dei numeri. I due più grandi algebristi più vicini a noi sono *Alkayami* ed *Alkarki*, i quali fiorirono al principio dell'XI secolo. Benchè i metodi dell'Algebra araba siano generali, tuttavia le applicazioni sono limitate ai problemi numerici; sicchè l'Algebra è un'Aritmetica; quindi è difficile poterla trattare disgiuntamente da questa. Dai loro libri di Aritmetica e dalle osservazioni, che derivavano da diverse opere di Algebra, s' inferisce che i metodi usati dagli Arabi nell'Aritmetica per la moltiplicazione e per la divisione erano analoghi a quelli ora in uso, quantunque meno comodi; ma i problemi, cui questa scienza era applicata, non differiscono sostanzialmente da quelli, che son dati ne' libri moderni, e venivano risolti con metodi simili a quelli adoperati nella regola del tre.

108. Qui non possiamo parlare delle vedute, che avevano gli Arabi nell'Astronomia e del valore delle loro osservazioni; ma si può ricordare incidentalmente, che essi accettarono la teoria come era stata formulata da Ipparco e da Tolomeo e che in essa non fecero un passo più avanti.

109. Gli Arabi come i Greci adoprarono la Trigonometria come un ausilio dell'Astronomia; ma in essa introdussero le espressioni trigonometriche ora in uso, e condussero a termine la Trigonometria piana di un solo angolo; conobbero pure gli elementi della Trigonometria sferica. Durante il secolo XII abbiamo in India *Bhaskara*, un altro matematico di gran valore; nella sua Algebra vediamo un progresso assai maggiore di quello de' suoi predecessori, poichè è sintetica e quasi simbolica. La sua Aritmetica contiene una esposizione ben chiara del sistema di numerazione decimale e l'uso del simbolo zero. La sua Geometria si fonda su quella degli scrittori greci, la quale come fu pubblicata venne subito conosciuta dagli Arabi.

110. Da questo rapido sguardo alla storia di quest'epoca abbiamo potuto constatare che gli Arabi avevano fatto un gran

Digitized by Google

progresso in Aritmetica, in Algebra ed in Trigonometria; essi tennero in molto conto le applicazioni della Geometria alla Astronomia, quantunque non estendessero i limiti di questa scienza; però non fecero grandi progressi nella Statica, nell'Ottica e nella Idrostatica, benchè è certo che possedessero vaste cognizioni in molti rami della scienza pratica.

Non ci pare necessario insistere più oltre sulla storia delle scuole arabe e di quella indiana; imperocchè esse non produssero nessun altro gran matematico, nè diedero conseguentemente scrittori, che abbiano promosso materialmente il progresso della scienza in Europa.

111. ***L'introduzione delle opere arabe in Europa.*** — Negli otto paragrafi che vanno dal 93 al 100, si è studiato lo sviluppo delle matematiche europee sino alla data che corrisponde precisamente alla fine « *dell'età oscure* » e nei dieci paragrafi, che vanno dal 101 al 110, si è tracciato la storia degli Indiani e degli Arabi fino alla medesima epoca. Le matematiche dei due o tre secoli, che vengono dopo, sono caratterizzate dall'introduzione in Europa dei libri di Matematica arabi e greci, provenienti da fonti arabe, e dall'assimilazione delle nuove idee in questa guisa acquistate.

112. Ad onta di tutto ciò le Matematiche arabe vennero in Europa occidentale dalla Spagna e non dall'Arabia. I Mori avevano stabilito il loro dominio nella Spagna nel 747; e verso il X secolo e l'XI raggiunsero un alto grado di civiltà. Benchè le loro relazioni politiche coi Califfi a Bagdad fossero talvolta poco cordiali, tuttavia questi fecero buon viso alle grandi opere matematiche degli Arabi. Così erano lette e commentate nelle tre università dei Mori o scuole di Granata, Cordova e Siviglia le traduzioni arabe delle opere di Euclide, di Archimede, di Apollonio e di Tolomeo, e forse di altri autori greci insieme alle opere degli algebristi arabi.

113. Durante l'XI, il XII ed il XIII secolo parecchi matematici Cristiani isolatamente s'impadronirono di queste opere, e ne fecero conoscere il contenuto a tutta Europa. I primi anni del

Digitized by Google

XIII secolo sono memorabili per la vita floridissima che ebbero parecchie università, e per tre grandi matematici che in quell'epoca videro la luce: Leonardo da Pisa, Giordano e Ruggero Bacone, monaco francescano di Oxford.

114. ***Leonardo Pisani.*** – Leonardo Fibonacci (filius Bonaccii) da Pisa nacque nel 1175; il padre Bonacci o Bonaccio era un mercatante, che aveva l'incarico di controllare una dogana in Barberia, ove studiò il figlio Leonardo, imparandovi il sistema di numerazione araba; ed ebbe occasione di studiarvi anche l'Algebra di *Alkarismi.* Leonardo tornò in Italia verso il 1200; e nel 1202 pubblicò un'opera, conosciuta come il «*Liber Abaci* (1)». In essa spiegò il sistema decimale di numerazione, facendo vedere la superiorità di esso sul sistema romano. Indi pubblicò un compendio di Algebra, nel quale fece vedere quanto fosse utile l'uso della Geometria per dare dimostrazioni rigorose delle formule algebriche; poi mostrò come si possano risolvere le equazioni semplici; risolse alcune equazioni quadratiche, e stabilì alcuni metodi per la risoluzione delle equazioni indeterminate; queste regole furon poi illustrate con problemi numerici. Tutta l'Algebra è retorica; quest'opera ebbe grandissima diffusione.

115. Il *Liber Abaci* è molto interessante nella storia delle matematiche, perchè esso introdusse praticamente nell'Europa cristiana l'uso delle cifre arabe. È probabile però che molti viaggiatori ed i mercatanti principali conoscesser di già il sistema di numerazione usato in oriente; gran parte dei matematici dovette pure conoscerlo. Leonardo tuttavia mise in evidenza la superiorità del sistema arabo su quello romano. L'uso delle cifre arabe si estese ben presto; e si può asserire che nell'anno 1300 od al più tardi nel 1350 le cifre arabe erano già ben note ai matematici ed ai commercianti italiani.

Ora diremo qualche cosa sulla storia di questi segni.

116. La fama di Leonardo era sì grande, che l'imperatore Federico II si fermò in Pisa nel 1225 per mettere a prova la va-

(1) Una traduzione dal titolo «*Fioretti di aritmetica*» fu edita dal Boncompagni, traendola da una copia del secolo XIV.

Digitized by Google

lentìa del matematico pisano col proporgli certi problemi. Il primo era « Di trovare un numero, il cui quadrato aumentato o diminuito di 5, rimanesse ancora un quadrato ». Leonardo diede la risposta esatta dicendo che era $\frac{41}{12}$. La seconda questione era di trovare coi metodi usati nel X libro di Euclide una retta tale, che la sua lunghezza x soddisfacesse l'equazione: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Leonardo dimostrò che questo problema non si poteva risolvere colla Geometria (elementare); ma diede un valore approssimato della radice di questa equazione, cioè $1,227^{ii}42^{iii}33^{iv}4^{v}40^{vi}$, che è uguale al numero 1,3388081075.... ed è esatto sino alla nona cifra decimale. Un altro problema era il seguente: « Tre uomini A, B, C posseggono una somma di danaro u, le loro parti stanno fra loro come 3 : 2 : 1. A prende x più una metà di x e deposita il rimanente presso D; B prende y più i $\frac{2}{3}$ di y e deposita il rimanente presso D; C prende tutto il resto cioè z più i $\frac{5}{6}$ di z, e deposita il rimanente presso D. Questo deposito presso D si trova appartenere ad A, B, C in proporzioni uguali. Trovare u, x, y e z ». Leonardo mostrò che il problema era indeterminato e dava una soluzione, che era $u = 47$, $x = 33$, $y = 13$ e $z = 1$.

117. ***Federico II,*** *1194-1250.* — L'imperatore Federico II nel XIII secolo si adoprò grandemente per far conoscere nell'Europa occidentale le opere dei Matematici arabi. Le Università di Napoli e di Padova rimasero monumenti della sua munificenza; la prima fu da lui fondata nel 1224, la seconda nel 1238. In quell'epoca in Ispagna era tollerata la presenza dei medici israeliti per la loro valentìa e per la pratica della scienza. Federico si servì dell'appoggio di questi scienziati ebrei per procurarsi copie delle opere arabe e delle edizioni degli autori greci, che vi erano in circolazione, e per tradurle. Mediante queste fonti alla fine del XIII secolo era facile potere avere le traduzioni delle opere di Euclide, di Archimede, di Apollonio e di alcuni di parecchi autori arabi. D'allora in poi possiam dire che il progresso della scienza in Europa avvenne indipendentemente dall'aiuto delle scuole arabe.

Digitized by Google

118. ***Giordano Nemorario.*** — Fra i contemporanei di Leonardo trovasi un matematico tedesco, Giordano, (1) le cui opere si può dire che rimasero quasi sconosciute fino a pochi anni or sono. Con lui si rinnovò la *Statica*, come nel secolo XIV si rinnovò la *Dinamica* con Giovanni Buridan (1327-1358) di Parigi, Rettore di quella università. Della sua vita poco o nulla sappiamo, all'infuori che fu eletto nel 1222 Generale dell'ordine domenicano. Le sue opere geometriche mostrano la sua grande profondità in questa scienza; ma specialmente sono notevoli quelle, che riguardano l'Aritmetica e l'Algebra. In queste ultime opere sono state impiegate le lettere per denotare le quantità note e quelle incognite, e sono state adoperate nelle dimostrazioni dei principî dell'Aritmetica e dell'Algebra. Come esempio di quest'uso qui riporteremo la risoluzione data da Giordano del problema: « Determinare due quantità, la cui somma ed il cui prodotto sono dati ». Ecco la sua soluzione Siano le quantità richieste $a + b$, che indico con γ e c; *allora* $\gamma + c$ è nota, e quindi $(\gamma + c)^2$, che denoto con e; così γc è noto, che indico con d; onde $4 \gamma c$, che è uguale ad $4d$, è conosciuto; l'indico con f, e allora sarà: $(\gamma - c)^2 = e - f$, che è conosciuta; la rappresento con g; perciò $\gamma - c = \sqrt{g}$, che è pur conosciuta, la indico con h; da cui $\gamma + c$ e $\gamma - c$ sono note; onde γ e c possono essere determinate entrambe ». È strano che egli abbia assunto come incognita la somma $a + b$; nell'esempio numerico prende la somma eguale a 10 e il prodotto a 21.

119. Quanto sopra si è esposto costituisce il primo esempio dell'Algebra sincopata conosciuta dai Matematici europei, in cui le lettere sono adoperate come simboli algebrici; ad onta di tutto ciò, è dubbio, se le opere di Giordano abbiano considerevolmente influito sullo sviluppo dell'Algebra in Europa. Invero nella storia delle Matematiche i perfezionamenti nella notazione e nel metodo spesso si verificano molto tempo prima, che siano generalmente adottati e che se ne realizzino i loro vantaggi. Ciò non si verifica fino a che l'importanza generale della scienza quasi non richieda tali miglioramenti e non sia questa importanza dimostrata da

(1) o G. di Nemore; alcuni lo credettero di Nemi (provincia di Roma).

Digitized by Google

qualche zelante ingegno, il quale richiami finalmente la generale attenzione su di essa.

120. Non mi par necessario discorrere qui delle opere di Meccanica, di Ottica e di Astronomia di Giordano; si sa che nel medioevo il metodo di trattare la Meccanica era generalmente molto oscuro.

Ora per più di dugento anni nella storia delle Matematiche non abbiamo nessun matematico d'ingegno come Leonardo e Giordano. Le loro opere individuali non debbono essere considerate come quelle, che ci fanno conoscere il valore della scienza di quell'epoca; poichè esse furono conosciute dagli studiosi solo due secoli dopo; e sembra che ben pochi fossero coloro, che traessero gran profitto da esse.

121. ***Ruggero Bacone,*** *1214-1294*. — Ruggero Bacone fu contemporaneo di Leonardo e di Giordano; egli nella scienza medica fece quanto questi ultimi avevano fatto nell'Aritmetica e nell'Algebra. Studiò ad Oxford ed a Parigi; ed insegnò scienze alcuni anni ad Oxford, in cui stabilì il principio fondamentale, che lo studio delle scienze deve essere generalmente basato solo sulla esperienza. Bacone cercò di ripristinare nelle Università l'insegnamento della logica mediante lo studio della Matematica e delle lingue; ma incontrò un grande ostacolo nell'influenza dell'epoca; onde non si tenne conto alcuno del suo grande elogio « *Sulla divina Matematica* », che formar dovrebbe il fondamento di ogni educazione liberale, e che « Solo può tergere l'intelletto e prepararlo allo studio di tutta la scienza ». Per giudicare quanto ristretto fosse allora il campo dello studio della Geometria, basterà ricordare che ad Oxford ben pochi erano i giovani, che andavano nei loro studî più oltre della 5ª proposizione del I libro di Euclide.

122. ***Il secolo XIV.*** — La storia del XIV secolo come quella del precedente in gran parte si riferisce all'introduzione ed all'assimilazione dei testi classici di Matematica arabi e delle opere greche, provenienti da fonti arabe. Alla metà di questo secolo la Geometria euclidea e l'algoritmo erano familiarissimi a tutti i

Digitized by Google

Matematici di professione; cosí era pure generalmente conosciuta l'Astronomia di Tolomeo. Circa quest'epoca gli Almanacchi cominciarono ad aggiungere alla spiegazione dei simboli arabi i principii di addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione, « de algorismo ». I Calendari più importanti ed altri Trattati contenevano pure un ragguaglio sulle regole delle proporzioni, illustrati da vari questioni pratiche.

123. Nella seconda metà di questo secolo ci fu una rivoluzione nelle Università contro la tirannia intellettuale degl' insegnanti. I risultati di queste influenze sugli studî di Matematica si vedono coi cambiamenti introdotti nello studio del *quadrivium*. Per esempio a Praga nel 1384 i candidati al grado di Baccelliere si dovevano preparare sul Trattato della sfera; e quelli al grado di maestro dovevano conoscere i primi sei libri di Euclide, l'Ottica, l'Idrostatica, la teoria della leva e l'Astronomia. Ma effettivamente le lezioni riguardavano l'Aritmetica, l'arte del calcolare colle cifre, l'algoritmo degli interi, gli Almanacchi, che probabilmente si riferivano all'Astrologia elementare e all'Astronomia di Tolomeo. Così pure a Vienna nel 1339 gli aspiranti al grado di maestro dovevano sapere i primi cinque libri di Euclide, la Prospettiva ordinaria, le parti proporzionali, la misura delle superficie, ed un Trattato sulla teoria dei pianeti, fondato sulle opere di Tolomeo. Ciò rappresenta un notevole progresso nelle Matematiche, se si pensa quanto era difficile portare delle innovazioni nelle Università medioevali. Lo studente doveva dar saggio del suo sapere con una lezione su certi argomenti; comunque riuscisse questa prova, egli otteneva sempre il grado, cui aspirava: ed è probabile che ben pochi siano stati gli scolari che studiassero veramente gli argomenti indicati più sopra.

123^bis^. ***Oresme.*** — Nicola Oresme fu un altro matematico del secolo XIV. Egli nacque a Caen nel 1323, divenne consigliere di Carlo V, da cui fu fatto tutore di Carlo VI; poi fu nominato vescovo di Lisieux, ove morì all'11 giugno 1382. Oresme scrisse sull'*algorismus Proportionum*, in cui è introdotta l'idea della tavola delle frazioni. Pubblicò anche un Trattato sul sistema monetario e sul cambio commerciale; dal punto di vista matema-

Digitized by Google

tico esso è una raccolta di notizie per l'uso delle frazioni ordinarie e l'introduzione dei simboli di esse.

Alle idee innovatrici di Buridan fecero plauso alcuni filosofi contemporanei e di poco posteriori; fra i più insigni Alberto di Sassonia e Nicola Oresme, entrambi della scuola di Parigi. Oresme fu il più geniale continuatore e divulgatore delle teorie di Buridan (Vedi N. 123bis). Fece vedere che il moto de' gravi, se fosse *uniformemente accelerato*, il cammino percosso con questo moto è uguale a quello che descriverebbe un mobile dotato di moto uniforme con volontà uguale alla media della velocità estremene dal primo moto. A questo grande risultato è pari e notevolissimo il suo modo di dimostrazione e di ricerca, perchè in esso figura per la prima volta l'impiego delle coordinate (dette poi cartesiane) per definire la posizione di un punto in un piano.

124. ***Il XV secolo.*** — Alcuni fatti, riportati dalla storia del XV secolo, mostrano chiaramente che l'ordinamento degli studî del quadrivium non era stato gran che rafforzato. Gli elenchi esistenti delle lezioni, impartite negli anni 1437 e 1438 nella università di Lipsia (fondata nel 1409), i cui statuti sono presso a poco uguali a quelli dell'università di Praga, mostrano che quelle date intorno alle Matematiche in quegli anni riguardavano solamente l'Astrologia; e pare che le Memorie esistenti delle Università di Bologna, Padova e Pisa attestino pur esse, che anche in questi Atenei nel XV secolo l'insegnamento della scienza si restringeva alla sola Astrologia. Soltanto dai registri dell' Università di Oxford si rileva che gli argomenti trattati negli anni 1449 e 1463 in quell'Ateneo si riferivano all'Astronomia di Tolomeo, od a qualche commento su di essa ed ai primi due libri di Euclide; ma è dubbio se gli studenti arrivassero tanto avanti. Da un'edizione degli *Elementi* di Euclide, pubblicata nel 1536 a Parigi, pare che dopo il 1452 i candidati al grado di magister in quella Università dovevano prestare il giuramento di avere assistito alle lezioni sui primi sei libri di quell'opera.

Verso la metà del XV secolo fu inventata la stampa (1455); e le facilitazioni che essa offrì per divulgare la scienza furono così grandi da portare una vera rivoluzione nel campo della scienza e nel suo progresso; questa forse è la data migliore per far terminare con essa il Medio-evo.

Digitized by Google

125. ***Le cifre arabe.*** — Avendo più volte accennato al sistema di numerazione arabo, ora possiamo aggiungere altre notizie sulla storia dei simboli presentemente in uso. La loro origine è incerta; in sostanza pare probabile che i simboli pe' numeri 4, 5, 6, 7 e 9, e forse anche per 8, siano derivati dalle lettere iniziali delle parole corrispondenti nell'alfabeto Indo-Bactriano in uso nel settentrione dell'India forse centocinquanta anni prima di Cristo, ed i simboli per i numeri 2 e 3 abbiano avuto origine da due o tre tratti paralleli di penna scritti in corsivo, e similmente il simbolo pel numero 1 rappresenti un sol tratto di penna.

Le cifre Devanagari (Indiane), circa 950.

Le cifre arabe Gobar 1100 circa.

Da un messale, di origine tedesca, 1385 circa.

Cifre europee (probabilmente italiane), 1400 circa.

Dallo *Specchio del mondo*, stampato dal Caxton nel 1480.

Da un calendario scozzese del 1482, probabilmente di origine francese.

Le cifre di questo tipo erano in uso nelle Indie prima della fine del VI secolo della nostra êra. L'origine del simbolo zero è incerta; ma è probabile che da principio fosse un segno adoperato per indicare uno spazio in bianco; e c'è ragione da credere che sia stato introdotto in India verso la fine del V secolo della nostra êra, benchè il primo scritto ora esistente, nel quale

Digitized by Google

comparisce, appartenga all'VIII secolo. Le cifre usate nell'India durante l'VIII secolo e dopo sono chiamate cifre *Devanagari* e la forma loro è stata riprodotta più sopra.

I simboli adoperati finalmente dagli Arabi si chiamano cifre Gobar; e ci possiamo fare un'idea delle forme usate più comunemente da quelle stampate nella seconda linea della tabelletta delle cifre sopra riprodotte. Dalla Spagna o dalla Barberia le cifre numeriche passarono nell'Europa occidentale.

I cambiamenti, che via via hanno subìto le forme dei simboli numerici, adoperati in tempi diversi sino a quelli ora usati, sono stati più sopra riprodotti in fac-smili. Tutti i segni delle cifre qui rappresentate sono scritti tutti da sinistra a destra e nell'ordine 1, 2.... 10. Dal 1500 in poi i simboli adoperati sono stati sempre uguali a quelli usati presentemente.

126. ***Introduzione delle cifre arabe nell'uso comune.*** — Lasciando per ora da banda la storia de' simboli, discorreremo della loro introduzione nell'uso generale. Si è già detto come i dotti e gli astronomi abbiamo potuto conoscere il sistema di numerazione araba verso la metà del XIII secolo. Si sa che il commercio d'Europa nel XIII e XIV secolo era quasi tutto nelle mani degli Italiani, i quali facilmente compresero i vantaggi del sistema algoristico, e tosto lo introdussero e lo fecero adottare per utilità del commercio in tutta l'Italia. Questo cambiamento non avvenne tuttavia senza una grande opposizione; infatti fu emanato un editto a Firenze nel 1299, con il quale si proibiva ai banchieri di usare le cifre arabe; ed i professori della Università di Padova nel 1348 ordinarono che fosse fatto un elenco di libri per la vendita pubblica coi prezzi seguenti: « Non per cifras sed per literas claras ». Pare che il divulgarsi dell'uso delle cifre arabe e dell'Aritmetica per tutto il resto di Europa sia in gran parte dovuto ai compilatori degli almanacchi e dei calendari, ed anche ai mercanti ed ai dotti. Questi calendari, avevano un'immensa diffusione; erano distinti in due tipi: alcuni erano redatti principalmente a scopi ecclesiastici; quindi contenevano le date delle diverse feste e pompe della chiesa per un periodo di circa sette od otto anni per lo meno, come segni di riti chiesastici. Tutti i monasteri e tutte le chiese di qualche importanza posse-

Digitized by Google

devano uno di questi calendari, ed ancora ne esistono numerose prove. Quelli del secondo tipo erano scritti specialmente ad uso degli astrologi e dei medici; ed i migliori esemplari contenevano delle note su diversi argomenti scientifici (specialmente di Astronomia e di Medicina). Questi calendari allora erano assai rari, poichè assai difficilmente riuscivano a penetrare in qualche biblioteca di corporazione religiosa; gli esemplari ora sono molto scarsi. I simboli arabi erano generalmente adoperati in entrambi i generi di Almanacchi; e vi sono (se ve ne sono) pochi esemplari di calendari pubblicati dopo l'anno 1300, nei quali trovasi una spiegazione del loro uso. Verso la metà del XV secolo furono pure aggiunte le regole dell'aritmetica *de algorismo;* e verso l'anno 1400 possiamo dire che le cifre arabe erano generalmente conosciute in tutta Europa ed usate comunemente nelle opere scientifiche ed astronomiche. Fuori d'Italia gran parte dei commercianti seguitavano tuttavia a tenere i conti in cifre Romane fino al 1550 ed i Monasteri ed i Collegi fino al 1650, benchè in entrambi i casi sia probabile, che durante il XV secolo e dopo i procedimenti dell'Aritmetica, venissero fatti in un modo algoristico. Nessun esempio di data o di numero, scritto in cifre arabe, si trova nei registri parocchiali inglesi o nei documenti di qualsiasi feudo inglese prima del XVI secolo; ma nel registro delle rendite del Capitolo di Sant'Andrea in Iscozia le cifre arabe sono state usate al principio del 1490. Le cifre arabe furono introdotte in Costantinopoli circa la stessa epoca che in Italia.

Digitized by Google

CAPITOLO III.

La Matematica del Rinascimento.

127. ***Principio del Rinascimento.*** — I Matematici si erano impossessati della scienza pervenuta ad essi dagli Arabi, contenuta nelle loro traduzioni delle opere degli autori greci, quando i profughi di Costantinopoli, dopo la caduta dell'impero di oriente, portarono seco i libri originali e le tradizioni della scienza ellèna. Così verso la metà del XV secolo le principali risultanze delle matematiche greche ed arabe poterono essere conosciute dagli studiosi èuropei.

L'invenzione della stampa, verificatasi intorno a quest'epoca, comparativamente rese facile il divulgamento della scoperta, e ciò senza dubbio produsse una grande rivoluzione nel progresso della scienza.

L'invenzione della stampa segna il principio del mondo moderno, e fu contemporanea ad un risveglio di attività in tutti i rami dello scibile umano. La creazione in questo intorno di tempo di un certo numero di Università (comprese quelle della Scozia) diverse e meno complesse di quelle medioevali, attesta che esisteva in quell'epoca un desiderio generale di istruirsi. La scoperta dell'America nel 1492 e le discussioni che precedettero la Riforma, riempirono l'Europa di nuove idee, le quali mediante l'invenzione della stampa furono disseminate da per tutto, ed il progresso verificatosi nelle Matematiche si ebbe pure in letteratura ,in arte ed in politica.

Digitized by Google

128. ***Regiomontano,*** *1436-1476.* — Fra i primi scrittori di questo periodo trovasi Regiomontano, il quale studiò matematiche sotto Purbach nella università di Vienna, poscia dopo aver viaggiato per circa dieci anni si stabilì nel 1471 per alcun tempo a Norimberga, ove fondò un Osservatorio, vi aperse una stamperia, e probabilmente v'insegnò.

Di poi si recò a Roma, ove era stato chiamato da Sisto IV per la riforma del calendario; e poco dopo il suo arrivo all'età di quarant'anni fu assassinato.

Regiomontano fu tra i primi a trarre profitto dal ripristinamento dei testi originali delle opere greche di Matematica; e se ne vide il frutto nel suo *De-Triangulis* scritto nel 1464. Quest'opera contiene la prima esposizione sistematica della Trigonometria piana e sferica, benchè le sole funzioni trigonometriche trattatevi siano quelle del seno e del coseno; in essa vi è adoperata l'Algebra. La sua Trigonometria, e così la sua Algebra sono retoriche; per esempio i gradi dell'argomento sono espressi in tutte parole.

129. ***Leonardo da Vinci,*** *1452-1519.* — Questo grande artista ci riconduce al Rinascimento.

Questo spirito multiforme del Rinascimento, che non soltanto erasi reso familiare l'Arte figurativa, ma anche l'Anatomia, la scienza dell'Ingegneria e la Meccanica, si occupò anche di filosofia. Egli nacque a Vinci in Toscana, imparò l'arte della pittura dal Verocchio. Da Ludovico il Moro egli venne chiamato a Milano, ove fondò un'Accademia delle Scienze. A Milano egli esercitò la sua attività non soltanto come pittore e come scultore, ma anche come ingegnere, musico e Direttore di feste alla Corte. Dopo la caduta di Ludovico il Moro egli lavorò specialmente a Firenze ed a Roma. Passò gli ultimi suoi anni in Francia ove spirò fra le braccia di Francesco I, e morì nel 1519 all'età di 75 anni. Per la sua vita instabile e per la sua molteplice attività (1) egli non potè elaborare le opere da lui progettate su

(1) Il Vasari nella sua opera « La vita dei più celebri pittori, scultori ed architetti » dice: « ...... vedesi bene che Leonardo per l'intelligenza dell'arte cominciò molte cose e nessuna mai ne finì, parendogli che la mano rag-

Digitized by Google

argomenti di scienze naturali e di Filosofia. Certo esse avrebbero avuto una profonda influenza nello sviluppo del pensiero scientifico, ed avrebbero anticipato in questo un notevole progresso. Molti pensieri che ci riconducono a Galilei ed a Bacone si trovano già espressi da Leonardo; ma giacquero sepolti nei suoi manoscritti, i quali non cominciarono ad essere ben noti che nel secolo XVIII ed ora il Governo Italiano saviamente da tempo attende alla loro pubblicazione, la quale farà rivivere uno dei più grandi genî di nostra stirpe.

Leonardo diceva che l'esperienza è madre della sapienza; e respinge le speculazioni che non abbiano una conferma nell'esperienza, la madre comune di tutte le scienze. Egli ritiene che la necessità è l'eterno vincolo, l'eterna regola della natura (*freno et regola eterna*); ora si tratta di penetrare fino ad essa, e per virtù di essa è possibile applicare la conoscenza matematica all'esperienza; così si può dai fenomeni presenti argomentare a quelli che stanno con essi in un rapporto condizionale.

Nella Meccanica questo si vede nel modo più chiaro e più semplice: essa è « il paradiso delle scienze matematiche ». Nei pensieri, che così risultano dalla combinazione degli aforismi di Leonardo, si contengono già i problemi fondamentali della moderna teoria della conoscenza. Per averli applicati praticamente egli divenne uno dei fondatori della moderna Meccanica e dell' Ingegneria.

Si sa che Leonardo fu grande amico di Pacioli. Inoltre si sa che Giordano Nemororio (vedi n. 118) e Leonardo da Vinci, rinnovando le opere di Archimede, avevano tracciato subito un nuovo sentiero al progresso.

La Statica ebbe a soffrirne, chè nella ammirazione della purezza logica di Archimede, si dimenticò che per penetrare nella intima natura delle cose ed in quelle di far prendere radici e nutrimento alla scienza occorre anzitutto l'intuizione; onde i fecondi e nutritivi principii di Giordano e di contro la nuova

giungere non potesse alla perfezione dell'arte nelle cose che egli si immaginava; conciossecchè si formava nell'idea alcune difficoltà sottili e tante meravigliose, che con le mani ancora che elle fussero eccellenti, non si sarebbero espresse mai ».

Digitized by Google

Scuola, come li chiama il Duhem, furono Guidobaldo Del Monte e G. B. Benedetti della metà del secolo XVI, uomini ingegnosissimi, i cui Trattati ebbero fortuna. Si dice fra l'altro che Leonardo avesse inventato un sottomarino, la polvere da cannone, scoperte che egli non volle rendere note, perchè a ragione egli riteneva che fossero dannose all'umanità.

È risaputo che Leonardo scriveva da destra verso sinistra.

Leonardo fu anche poeta e matematico: si ha di lui anche una bella dimostrazione del Teorema di Pitagora.

Leonardo può considerarsi anche come il procursore della aviazione. Col suo studio « *Sul volo degli Uccelli* » ci lasciò « Il Codice del volo degli uccelli », e così si avviò agli studî « *Sulla Macchina volante* », i quali vanno in un primo periodo dal 1486 al 1490, ed in un secondo periodo dal 1505 in poi. Egli voleva rendere l'uomo padrone dell'aria, ma purtroppo non vi riuscì, benchè egli inventasse diverse ed ingegnosissime macchine per volare: non aveva a sua disposizione i motori a scoppio!

Leonardo fu il primo a riconoscere l'importanza della nozione generale del momento statico nella Meccanica.

È assai difficile dire in qual modo egli sia giunto a questa veduta generale; ma è ben chiaro che Leonardo ha conosciuto ciò, che determina l'azione di un peso.

Nel caso della leva riguardò le leggi diverse di equilibrio, secondo le circostanze, che si consideravano come determinanti, e che furono in primo luogo i pesi, le lunghezze dei bracci della leva, studiate da Archimede, e poi i pesi e le distanze delle linee di azione della forza dall'asse, studiate da Leonardo.

Il più grande dei precursori di Galilei è certamente Leonardo da Vinci; ma, come si è già detto, i suoi lavori non ebbero alcuna influenza sul progresso scientifico, perchè essi furono pubblicati per la prima volta nel 1797 dal Venturi e solo in parte. Lo studio dei Mss. di Leonardo, pubblicati come si è detto solo in parte, dà la più ricca messe; il confronto delle sue diverse note occasionali mostra chiaramente la sua conoscenza del principio degli spostamenti virtuali o per meglio dire del concetto di lavoro. Il geniale Aperçu « della leva potenziale », pone Leonardo in grado di ottenere tutti questi concetti, che

Digitized by Google

furono più tardi basati sul concetto di momento. I suoi disegni fanno sospettare che la considerazione della carrucola e dell'asse della ruota gli abbiano indicata la via alla sua concezione.

Il concetto della impossibiltà del moto perpetuo si trova già sviluppato in Leonardo con grande chiarezza.

Leonardo conosce la caduta accelerata de' gravi, intravede il crescere della velocità proporzionalmente al tempo, che egli attribuisce alla resistenza dell'aria successivamente diminuente; ma non sa dedurre la giusta dipendenza dello spazio dal tempo.

Già Leonardo nota di passaggio che la freccia non è spinta dalla corda, che la tocca solo alla massima tensione dell'arco, ma anche nelle altre posizioni.

130. ***Introduzione dei segni*** $+$, $-$ *ed* $=$. — Intorno a quest'epoca furono conseguiti nella notazione algebrica alcuni miglioramenti, in particolar modo la introduzione dei simboli adoperati per l'addizione, la sottrazione e l'eguaglianza.

Uno dei primi esempi dell'uso dei segni $+$ e $-$ si trova nell'Aritmetica del Widman, pubblicata nel 1489. In origine si è supposto che questi segni fossero semplici marche di magazzino; ma qualche prova recente ha suffragato l'ipotesi già fatta precedentemente, che il segno *plus* fosse l'abbreviazione latina *&* per *et;* mentre che il segno *minus* siasi ottenuto dalla lineetta, che è sovente scritta sopra la forma contratta di una parola per significare, che certe lettere sono state trascurate. Sembra che questi simboli abbiano avuto origine in Germania; in Inghilterra furono comunemente adoperati nel 1540.

Il simbolo $=$ per l'eguaglianza fu introdotto da Record Whetstone da Witte, Londra 1557. Egli disse che fu scelto questo segno per l'eguaglianza, perchè non vi possono essere due cose maggiormente eguali di due linee rette. Tuttavia è stato osservato che esso è un'abbreviazione non rara della parola *est* nei manoscritti medioevali, e questa sarebbe un'origine più attendibile.

L'introduzione di questi segni fu fatta per semplici ragioni di convenienza, poichè essi furono riguardati solo come abbreviazioni di poca importanza e non come simboli di operazioni; e certamente nessuno in quell'epoca avrebbe pensato che l'ado-

Digitized by Google

zione di questi segni dovesse preparare la via ad una rivoluzione nei metodi algebrici.

131. ***Pacioli,*** *circa il 1500.* — Luca Pacioli o Paciolo nacque in Borgo San Sepolcro in Toscana verso la metà del XV secolo; ben poco si sa della sua vita, all'infuori che fu frate francescano, che dopo avere insegnato in varie città italiane, fu il primo a coprire una cattedra di Matematica a Milano, fondatavi dallo Sforza: morì a Firenze circa l'anno 1510.

132. La sua opera principale, intitolata *Summa* de *arithmetica, geometria, proporzioni* e *proporzionalità,* stampata in Venezia nel 1494, consta di due parti; la prima tratta dell'Aritmetica e dell'Algebra: la seconda della Geometria. Questo fu il primo libro pubblicato di Aritmetica e di Algebra, e per questa ragione e per la grande diffusione, che conseguentemente ebbe, fu un'opera di grande importanza per quell'epoca.

133. Nell'Aritmetica Paciolo diede le regole per le quattro operazioni fondamentali ed un metodo per estrarre la radice quadrata; inoltre trattò bellissime questioni tutte riguardanti l'Aritmetica commerciale, cui terminava sempre con moltissimi esempi; ed in particolare studiò le cambiali ampiamente e la teoria della tenuta dei libri a partita doppia (n. 76); quindi egli a ragione è considerato il primo espositore del metodo a partita doppia, quantunque egli dichiari di narrare quanto si praticava già a quei tempi dai mercanti veneziani. L'opera di Paciolo fu la prima pubblicazione, in cui venne esposto sistematicamente l'algoritmo aritmetico. La maggior parte dei problemi vi sono risolti col metodo della falsa posizione; ma vi sono parecchi errori numerici.

134. Nell'Algebra Paciolo trovò l'espressione della somma dei quadrati e della somma dei cubi dei primi n numeri naturali; gran parte di essa è dedicata alle equazioni semplici e quadratiche ed ai problemi sui numeri, che conducono a queste equazioni. Ricordò la classificazione araba delle equazioni cubiche; ma aggiunse che la loro risoluzione gli sembrava così impossibile come

Digitized by Google

la quadratura del cerchio. La seguente è la sua regola per risolvere un'equazione quadratica della forma $x^2+x=a$; essa è retorica e non sincopata e servirà ad illustrare la non convenienza di quel metodo: « si res et census numero coaequantur, a rebus dimidio sumpto censum producere debes, addèreque numero; cujus a radice totiens tolle semis rerum, census latusque redibit ». Egli si limitò a considerare soltanto le radici positive delle equazioni.

135. Gran parte della materia sopra descritta è stata tolta dal *Liber Abaci* di Leonardo; ma è espressa in una notazione migliore. Paciolo seguì gli Arabi chiamando la quantità incognita la *cosa*, e in latino *res*, e qualche volta la denota con *co* o R o Rj. Chiamò il quadrato di essa *census* o *zensus*, e qualche volta lo denotò con *ce* o Z; similmente il cubo di essa o *cuba* è talvolta rappresentato con *cu* o C; la quarta potenza o *censo di censo* è scritta per disteso o *ce* di *ce* o *ce ce*. L'addizione e l'eguaglianza sono indicate colle lettere iniziali della parola *plus* ed aequalis; ma l'introduzione di un simbolo per rappresentare *minus* è generalmente evitata, scrivendo le quantità in quel membro dell'equazione che le rende positive; tuttavia in alcuni luoghi denotò *minus* con *m* o *demptus* con *de*. Tali simboli per significare *più* e *meno* furono usati da Chuquet di Parigi nel 1484. La introduzione nelle Matematiche di queste abbreviazioni costituisce un principio dell'Algebra sincopata.

136. Nella seconda parte dell'opera di Paciolo, che è dedicata alla Geometria, non vi è nulla di straordinario, così pure in gran parte nella Geometria, che scrisse di poi; tuttavia si può osservare che come Regiomontano egli adoperò l'Algebra per istudiare vie meglio le proprietà geometriche delle figure.

137. Al principio del XVI secolo la stampa incominciò vie più a svilupparsi e a diffondersene l'uso; sicchè molte opere dei principali matematici in quell'epoca poterono essere acquistate e lette dagli studiosi. Ciò indubbiamente dovette essere di grande stimolo alla ricerca; e prima della metà di questo secolo vennero alla luce numerose opere, le quali quantunque non conte-

Digitized by Google

nessero grandi scoperte, tuttavia introdussero nell'Algebra diversi lievi miglioramenti, tutti tendenti a renderla più analitica e a familiarizzare il pubblico coi simboli di abbreviazione, se non di operazione.

138. ***Tartaglia***, *1500-1557*. — Niccolò Fontana, che fu poi nomato Tartaglia, cioè il balbuziente, nacque in Brescia. Allorchè aveva dodici anni i Francesi presero la città di Brescia, e nel massacro che ne seguì, il povero Tartaglia fu lasciato per morto col cranio, una mascella ed il palato spaccati. La madre sua trovatolo vivo, tentò di trasportarlo via; essendo priva di ogni risorsa, chiamò presso il piccolo malato alcuni cani, perchè gli leccassero le ferite; a questo rimedio bestiale essa attribuì la guarigione del proprio figliuolo; ma la ferita al palato, benchè si rimarginasse compiutamente, gli lasciò un impedimento nel parlare, onde ricevette il suo sovrannome. Sua madre ottenne il danaro sufficiente per pagare il mantenimento alla scuola del proprio figliuolo per quindici giorni; in questo tempo Tartaglia potè rubare un quaderno, onde egli poi imparò da sè stesso a leggere ed a scrivere; e dicesi che la sua famiglia era sì povera, che non aveva nemmeno i mezzi per comprargli la carta per iscrivere, tanto che egli era obbligato a fare i suoi esercizi di scrittura sulla pietra da lavagna. Incominciò la sua carriera insegnando a Verona; in seguito fu nominato ad una cattedra di Matematica a Venezia, cattedra che occupò fino alla morte.

138[bis]. Egli nel 1535 si rese famoso per avere accettato una sfida di un certo *Antonio Del-Fiore*, che aveva dato una soluzione empirica di un'equazione numerica della forma $x^3+qx=r$. Tartaglia dimostrò che potevasi ottenere la soluzione di un' equazione numerica della forma $x^3+qx^2=r$; Del-Fiore credendo che Tartaglia fosse un impostore, lo sfidò ad una disputa. Secondo i patti fermati per questa sfida, ognuno doveva depositare presso un notaio una certa somma di danaro; e chi avesse risolto entro trenta giorni un maggior numero di problemi, oltre i trenta che l'uno aveva proposti all'altro, avrebbe vinto le somme depositate. Tartaglia accettò la sfida; e sospettando che le questioni

Digitized by Google

propostegli menassero ad equazioni cubiche, si mise subito a studiare la loro teoria, e così potè scoprire il modo di ottenerne la soluzione di alcune, se non di tutte le equazioni cubiche. Si riteneva che la sua risoluzione dipendesse da una costruzione geometrica, ma essa condusse alla formula che spesso ingiustamente viene detta di *Cardano*.

Allorchè ebbe luogo la sfida, Tartaglia riuscì in due ore a risolvere tutte le questioni, che gli erano state proposte sui casi particolari della equazione $x^3 + qx = r$, di cui egli conosceva la soluzione. Il suo rivale non seppe risolvere nessuno dei problemi, che gli erano stati proposti, i quali in sostanza si riducevan tutti ad equazioni numeriche della forma $x^3 + qx^2 = r$.

139. Le opere principali di Tartaglia consistono in una Aritmetica pubblicata nel 1556 ed in un Trattato sui numeri pubblicato nel 1560. Questi lavori del Tartaglia sono alquanto prolissi; tuttavia offrono una chiara esposizione dei diversi metodi allora in uso, e riportano numerose note storiche. La prima contiene un gran numero di questioni in ogni specie di problemi, che si possono presentare nell'Aritmetica commerciale; e vi sono parecchi tentativi per trovare una formula algebrica, che servisse anche per problemi particolari. Nella seconda mostrò come i coefficienti della *x nello sviluppo di* $(1+x)^n$ potevano essere calcolati mediante quelli dello sviluppo di $(1+x)^{n-1}$ nei casi, ne' quali n è uguale a 2, 3, 4, 5 o 6.

140. **Cardano**, *1501-1576*. — La vita di Tartaglia fu amareggiata da una contesa col suo contemporaneo Cardano, il quale, benchè avesse ottenuto sotto il vincolo del segreto la sua soluzione di un'equazione cubica, ebbe l'ardire di pubblicarla col suo nome.

La vita e la carriera di Cardano costituiscono una storia di fatti straordinari e assai disdicevoli: un gran giocatore e baro, forse anche omicida; ma egli fu anche l'ardente studioso della scienza matematica, risolvendo problemi, che per lungo ordine d'anni avevano deluso ogni investigazione. Una parte della sua vita fu dedita ad intrighi d'ogni maniera, che nel secolo XVI costituirono anche in Italia un vero scandalo; l'altra nel farne-

Digitized by Google

ticare sulla Astrologia (1), e nel dichiarare ancora agli altri, che la filosofia era il solo argomento degno dell'attenzione umana: il suo genio era strettamente collegato alla pazzia.

141. L'opera principale di Matematica del Cardano è l'*Ars Magna*, pubblicata nel 1545. Cardano prese viva parte nella contesa fra Tartaglia e del-Fiore; e siccome aveva già incominciato a scrivere la sua opera, domandò al Tartaglia di comunicargli il suo metodo per la risoluzione di un'equazione cubica; ma Tartaglia rifiutò. Subito dopo Cardano gli scrisse, pregandolo vivamente di recarsi a Milano, ove lo attendeva un nobile italiano, che desiderava di fare la sua conoscenza. Tartaglia infatti si recò a Milano; ma benchè alla fine del suo viaggio non trovasse nessun nobile che lo aspettasse, egli cedette alle vive insistenze del Cardano, e gli comunicò la regola, di cui egli aveva bisogno. Cardano aveva dal canto suo con giuramento solenne promesso che non l'avrebbe mai rivelata a nessuno; e se l'avesse messa anche in iscritto, l'avrebbe fatto in modo, che dopo la sua morte nessuno l'avrebbe compresa. Sembra tuttavia che egli subito insegnasse il metodo, ed il risultato fu pubblicato nel 1545.

142. L'*Ars Magna* è superiore a tutte le opere di Algebra pubblicate sino a quell'epoca. Precedentemente gli algebristi avevano preso in considerazione solo le radici positive di un'equazione; fu Cardano che studiò le radici negative ed anche le immaginarie, e dimostrò che queste ultime erano sempre accoppiate; ma rifiutossi di dare qualsiasi spiegazione intorno al significato di queste quantità *sofistiche*, che egli osservò che erano assai ingegnose, quantunque di nessuna utilità pratica. Pare che gran parte della sua analisi delle equazioni cubiche sia originale; e dimostrò che se le tre radici erano reali, la soluzione di Tartaglia le dava in una forma, che implicava le quantità immaginarie. Pochi anni dopo Bombelli fece qualche ricerca in proposito; ma lui eccettuato, i Matematici, che vennero dopo,

(1) Riportiamo qui un motto di Voltaire: « L'Astrologie est la fille de l'Astronomie; mais c'est la fille très-folle d'une mère très-sage ».

Digitized by Google

ben poco richiamarono la loro attenzione sulle quantità immaginarie; finchè dopo circa due secoli Eulero seguitò gli studî su queste qualità; ma solo Gauss pose questa teoria su di una salda base sistematica ed introdusse la notazione moderna delle variabili complesse, ed usò il simbolo i per denotare la radice quadrata di -1; la teoria moderna si fonda principalmente sulle sue ricerche.

143. Cardano stabilì le relazioni, che legano le radici di una equazione ai coefficienti di essa. Egli conobbe il principio noto come « *Regola de' segni* » di Descartes; siccome però seguì l'uso d'allora di scrivere un'equazione come un'eguaglianza di due espressioni, non gli riuscì di esprimere detta regola in modo conciso. Espose un metodo di approssimazione pel calcolo delle radici di una equazione numerica, il quale si fondava su questo fatto « Che se una funzione assume valori di opposti segni, quando si sostituiscono due numeri in essa, allora l'equazione, che si ottiene eguagliando a zero la funzione, ammette una radice compresa fra questi due numeri ».

144. La soluzione che diede Cardano di un'equazione biquadratica è geometrica e sostanzialmente la stessa di quella data, e già veduta, da Alkarismi; ed anche la risoluzione di un'equazione cubica è pure geometrica. Così per risolvere l'equazione $x^3+6x=20$, oppure qualunque equazione della forma $x^3+qx=r$, trovò due cubi tali, che il rettangolo dei loro rispettivi spigoli è 2, oppure $\frac{1}{3}q$, e la differenza dei loro volumi è 20, oppure r; e dimostrò che x è eguale alla differenza degli spigoli di questi cubi.

Per ottenere la lunghezza degli spigoli dei due cubi doveva risolvere semplicemente un'equazione di 2° grado, per la quale la soluzione geometrica data precedentemente era sufficiente. Come i suoi predecessori diede dimostrazioni separate della regola per le differenti forme di equazioni, che si risolvono mediante di essa. Così dimostrò la regola indipendentemente per l'equazione della forma: $x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+px+q=0$, e $x^3+q=px$.

Digitized by Google

Le equazioni, che egli considerò, sono numeriche, ma in qualcuna delle sue analisi adoperò i coefficienti letterali. Il suo scolare Luigi Ferrari (1522-1565) ricondusse la risoluzione di un'equazione biquadratica a quella di un'equazione cubica; la soluzione è data nell'*Ars Magna* come vedremo in seguito.

145. Subito dopo Cardano abbiamo un numero di mediocri Matematici, i quali tuttavia fecero un buon lavorìo per divulgare l'Algebra e per investigare le formule della Trigonometria piana, che contengono più di un angolo; per esempio le formule ordinarie per $sen\ (\alpha \pm \beta)$.

Intorno a quell'epoca comparvero pure parecchie opere classiche di Algebra; in particolare si deve far menzione di una del Bombelli pubblicata nel 1572.

146. L'Algebra di Raffaele Bombelli contiene un'esposizione sistematica della scienza allora in vigore. In essa egli studiò i radicali reali ed immaginarii; trattò pure la teoria delle equazioni, e dimostrò pure che nel caso irriducibile di un'equazione cubica le radici sono tutte reali. Quest'opera è notevole specialmente per l'introduzione di un miglioramento nelle notazioni dell'Algebra. I simboli allora ordinariamente usati per le quantità incognite e le loro potenze erano lettere, che si adottavano per l'abbreviazioni delle parole. Quelli usati più frequentemente erano *R* o *Rj* per *radix* o *res* (x), Z o C per *zensus* o *census* (x^3), C o K per *cubus* (x^3) ecc.

Così $x^2 + 5x - 4$ sarebbe stata scritta 1Z p. 5R. m. 4, ove *p* era usato per *più* ed *m* per *meno*. Altre lettere e simboli erano pure usati, ed alcuni matematici avrebbero scritto la espressione suddetta così: 1Q + 5N − 4. Il progresso fatto da Bombelli fu quando introdusse il simbolo $\overset{1}{\smile}$ per la quantità incognita, $\overset{2}{\smile}$ pel suo quadrato, $\overset{3}{\smile}$ pel suo cubo e così via; perciò scrisse $x^2 + 5x - 4$ così 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 5 $\overset{1}{\smile}$ m. Nel 1586 Stevino usò ①, ② ③,... in modo simile L'espressione suddetta sarebbe stata scritta così: 1② + 5① − 4⓪. Ma se i simboli erano più o meno convenienti, essi erano soltanto le abbreviazioni per le parole, ed erano soggette a tutte le regole della sintassi. Essi riuscivano unicamente a fornire una specie di scrittura abbreviata, con cui i

Digitized by Google

diversi passaggi ed i risultati potevano essere espressi concisamente. Il nuovo progresso fu la creazione di un'Algebra simbolica, e il merito principale di esso è dovuto a Vieta; ma prima di parlare di Vieta diremo qualche cosa di Scipione del-Ferro.

147. ***Scipione Del-Ferro***, *circa 1465-1526.* — Della sua vita e de' suoi scritti si sa ben poco: nacque a Bologna circa il 1465 e vi morì tra il 29 ottobre od il 16 novembre del 1526. Fu professore per oltre trent'anni all'Università di Bologna, ove dopo la sua morte gli succedette il genero Annibale Della-Nave, che s'impossessò pure degli scritti di lui; ma disgraziatamente non li fece publicare, e pare se li tenesse unicamente per sè; quindi non sappiamo sino a qual punto arrivassero i manoscritti di Del-Ferro; tuttavia dai pochi indizi, che abbiamo, si può dire che Scipione Del-Ferro si occupò più volte di quella *geometria ad una sola apertura di compasso*, ai suoi tempi assai in voga in Italia; ma non cooperò molto pel suo sviluppo; inoltre possiam dire che egli ebbe un posto importante nella storia della risoluzione dell'equazione cubica della forma speciale $x^3 + ax = b$. Però non si sa come egli sia riuscito nella risoluzione di questa equazione, ancora impossibile per Paciolo e per altri, che la trattarono colla falsa posizione; nè si sa precisamente quando fece la scoperta, poichè su ciò sono apparse due ipotesi contraddicentesi fra loro.

148. ***Vieta***, *1540-1603.* — Vieta nacque vicino alla Rochelle: studiò giurisprudenza e per qualche tempo frequentò il fôro parigino; e circa il 1580 fu iscritto al pubblico servizio e di poi dedicò gran parte delle sue ore di ozio allo studio della Matematica. La sua fama fu sempre grandissima. Quando un giorno l'ambasciatore dei Paesi Bassi osservò ad Enrico IV che la Francia non aveva nessun geometra capace di risolvere un problema, che era stato proposto nel 1593 dal contadino Adriano Romanus a tutti i Matematici del mondo e che richiedeva la risoluzione di un'equazione del 45° grado, Vieta, che era informato della sfida e conosceva lo sviluppo di $sen\ n\ \theta$ in funzione di $sen\ \theta$ e $cos\ \theta$, subito disse che l'equazione era soddisfatta

Digitized by Google

dalla corda di un cerchio di raggio uno, che sottende al centro un angolo $\frac{2\pi}{45}$, ed in pochi minuti diede la soluzione del problema. Questo fatto gli procacciò grande fama.

149. Vieta pubblicò molte opere di Algebra e di Geometria. La più importante fu la *In Artem Analyticam Isagoge*, 1591, che era la principale opera di Algebra simbolica. In essa è impiegato sistematicamente il segno + ed il segno – come veri simboli di operazioni; ma non aveva nessun segno per denotare l'eguaglianza. Adoperò pure le lettere per rappresentare tanto le quantità incognite, quanto le quantità note, una notazione per le potenze di quantità ed esaltò il vantaggio di adoperare le equazioni omogenee. A quest'opera aggiunse un'appendice sull'addizione e sulla moltiplicazione delle quantità algebriche e sulle potenze di un binomio fino alla sesta. Vieta non disse che conosceva il modo di formare i coefficienti di questi sei sviluppi mediante il triangolo aritmetico come aveva fatto Tartaglia; ma fu Pascal il primo a dare la regola generale per formarlo per qualunque potenza del binomio; e Newton fu il primo a dare l'espressione generale del coefficiente di x^p nello sviluppo di $(1 + x)^n$. Poi alla stessa opera Vieta aggiunse un'altra appendice sulla risoluzione delle equazioni.

150. La *In Artem* ha molta importanza, perchè con essa Vieta ha reso a tutti noto due considerevoli miglioramenti nella notazione algebrica; in entrambi Vieta era stato preceduto da altri; ma egli ha il merito, che nessuno gli può negare, di averli, esagerandone l'importanza, resi noti precisamente, quando i tempi erano maturi per un simile progresso.

151. Uno di questi miglioramenti consiste nell'avere rappresentato le quantità note colle consonanti B, C, D ecc. e le quantità incognite colle vocali A, E, I ecc.; così in un problema poteva essere impiegata più di una quantità incognita.

L'uso odierno di adoprare le prime lettere dell'alfabeto *a*, *b*, *c* ecc. per rappresentare le quantità note e le ultime *x*, *y*, *z* ecc.

Digitized by Google

per le quantità incognite fu introdotto nell'Algebra da Descartes nel 1637.

152. L'altro miglioramento era questo: Fino a quest'epoca per rappresentare il quadrato, il cubo ecc. di quantità, che compariscono sempre nelle equazioni, vi era l'uso d'introdurre nuovi simboli; così per esempio se R od M rappresentavano x, Z o C o Q, rappresentavano x^2, e C o K l'x^3 ecc.; finchè arrivò il momento del principale progresso dell'Algebra, allorquando fu escogitata un'esposizione concisa dei risultati, ed ognuno di essi venne dimostrato. Ma mentre Vieta usava A per denotare la quantità incognita x, qualche volta egli impiegava per A *quadratus*, A *cubus*... per rappresentare x^2, x^3,... che subito dimostravano la relazione fra le differenti potenze; ed infine le successive potenze di A furono comunemente denotate colle abbreviazioni Aq, Ac, Aqq ecc.

153. In altri lavori Vieta dimostrò che il primo membro dell'equazione algebrica $\varphi(x) = 0$ poteva scomporsi in fattori lineari, e fece vedere come i coefficienti della x potevano essere espressi in funzioni delle radici. Inoltre mostrò come da un'equazione data se ne può ottenere un'altra, le cui radici siano uguali a quelle dell'equazione primitiva, accresciute o moltiplicate per una data quantità; ed adoperò questo metodo per annullare il coefficiente di x in una equazione quadratica, ed il coefficiente di x^2 in un'equazione cubica; e così potè dare la soluzione algebrica generale di tutte e due queste equazioni.

154. La sua risoluzione di un'equazione cubica è la seguente: Riduce in primo luogo l'equazione alla forma $x^3 + 3a^2x = 2b^3$; poi pone $x = \frac{a^2}{y} - y$ e così si ottiene: $y^6 + 2b^3y^3 = a^6$, che è un'equazione biquadratica in y^3; onde si può trovare y, quindi x.

155. La sua risoluzione di un'equazione biquadratica è simile a quella di Ferrari ed è la seguente: Prima di tutto cercava di fare scomparire la x^3, riducendo così l'equazione alla forma

Digitized by Google

$x^4 + a^2x^2 + b^3x = c^4$; poi trasportava al secondo membro i termini a^2x^2 e b^3x, quindi aggiungeva ad ambo i membri $x^2y^2 + \frac{1}{4} y^4$, così aveva l'equazione:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2} y^2\right)^2 = x^2 (y^2 - a^2) - b^3 x + \frac{1}{4} y^4 + c^4.$$

Indi sceglieva y in modo, che il secondo membro di questa equazione fosse un quadrato perfetto. Sostituendo questo valore di y, egli potea estrarre la radice quadrata da ambo i membri, ed ottenere così due equazioni quadratiche in x, che si potevano risolvere.

156. ***Girard***, *1595-1632*. — Girard, matematico olandese, estese i risultati ottenuti da Vieta in Trigonometria e nella teoria delle equazioni. Le principali scoperte di Girard sono contenute nella sua « *Invention nouvelle en l'algèbre*, pubblicata nel 1629; quest'opera contiene il primo uso delle parentesi, un'interpretazione geometrica del segno negativo, l'affermazione che il numero delle radici di un'equazione algebrica è uguale al suo grado, la distinzione di radici reali ed immaginarie, e probabilmente contiene anche il teorema che un'equazione algebrica $f(x) = 0$ può scomporsi in prodotto di fattori lineari. Però non si sa precisamente se questo teorema sia dovuto a Vieta od a Girard. Però è certo che fu Girard a scoprire le formule, dette di Newton, che dànno la somma delle potenze simili delle radici di un'equazione in funzione di esse.

157. ***Napier***, *1550-1617*. — Giovanni Napier, l'inventore dei logaritmi naturali (detti anche iperbolici a base *e*) nacque a Merchiston. Passò gran parte della sua vita presso la sua famiglia vicino ad Edinburgo, prendendo parte attivissima alle lotte politiche e religiose, che fervevano allora.

Uno dei negozi principali della sua vita fu di dimostrare che il papa era un anti-Cristo; ma il suo divertimento prediletto era costituito dallo studio delle Matematiche. Oltre l'invenzione dei logaritmi, egli nel 1617 costrusse il suo regolo calcolatore, mediante il quale un numero poteva essere moltiplicato o diviso

Digitized by Google

per un altro. Nella Trigonometria sferica scoprì pure certe formule, ora conosciute col nome di analogie di Napier, ed enunciò « La regola delle parti circolari » per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

158. ***Invenzione dei logaritmi.*** Appena l'uso degli esponenti divenne generale nell'Algebra, l'invenzione dei logaritmi ne fu natural conseguenza; ma Napier li inventò indipendentemente, senza tener conto della nuova notazione simbolica; la sua invenzione fu frutto degli sforzi di parecchi anni per abbreviare i procedimenti della moltiplicazione e della divisione. La scoperta fu annunciata nel 1614.

159. ***Briggs,*** *1561-1631.* — Briggs studiò a Cambridge; ed occupò per primo la cattedra Saviliana di Geometria, allora fondata in Oxford, che tenne fino alla morte. Può essere interessante l'aggiungere, che egli incominciò le sue lezioni ad Oxford colla 9ª proposizione del I libro di Euclide, punto in cui arrivava Savile nelle sue lezioni.

160. L'adozione quasi immediata in tutta Europa de' logaritmi per i calcoli astronomici, e per altri calcoli, fu dovuta principalmente a Briggs, il quale nel 1627 costruì e pubblicò la prima tavola dei logaritmi volgari, detti anche artificiali, briggiani. Inoltre egli convinse Keplero dei vantaggi delle scoperte di Napier; e la diffusione dell'uso dei logaritmi fu sollecitata anche dallo zelo e dalla fama di Keplero, che colle sue tavole del 1625 e 1629 li fece portare in voga in Germania; ed altrettanto fecero nel 1524 Cavalieri in Italia e nel 1626 Wingate in Francia.

161. La introduzione nei procedimenti aritmetici della notazione decimale per le frazioni è pure dovuta, secondo l'opinione di Rouse Ball, a Briggs. Prima del XVI secolo le frazioni erano scritte ordinariamente nel sistema sessagesimale. Nel 1585 Stevino usò una notazione decimale, poichè scrisse un numero della forma 25, 3′ 7″ 9‴ o 25 ⓪ 3 ① 7 ② 9 ③ così 25, 379; e Napier nel suo saggio sui regoli calcolatori adottò l'ultima notazione; ma questi Matematici impiegarono la virgola solo come un

Digitized by Google

modo conciso di scrivere i risultati, e non fecero alcun uso di questa notazione come forma operativa. Briggs sottolineò le cifre decimali; per es. il numero 25,379 l'avrebbe scritto così: $25\,\underline{379}$. Gli scrittori, che vennero di poi, aggiunsero un'altra linea, ed avrebbero scritto quel numero così: $25\,|\underline{379}$; solo al principio del XVIII secolo fu generalmente adottata la notazione ora in uso.

162. ***Harriot,*** *1560-1621.* — Harriot estese ed ordinò la teoria delle equazioni. Passò gran parte della sua vita in America con sir Gualtiero Raleigh, ove fece il primo catasto della Virginia e della Carolina settentrionale, le cui carte furono poi presentate alla regina Elisabetta. Ritornato in Inghilterra si stabilì a Londra, ove si dedicò agli studî matematici. La sua *Artis Analyticae Praxis*, stampata per la prima volta nel 1631, non differisce sostanzialmente da un libro moderno di Algebra e della teoria delle equazioni; è più analitica di qualunque altra Algebra, che la precedette, e certamente essa segna un gran progresso nei simboli e nella notazione. Si crede che Harriot fu il primo scrittore a comprendere l'utilità grandissima, che ottiensi col trasportare tutti i termini di un'equazione in un sol membro; fu anche il primo ad usare i segni di diseguaglianza $>$ e $<$ per rappresentare maggiore e minore; denotò la quantità incognita con a, e rappresentò a^2 con aa, a^3 con aaa e così via; e questo è stato un gran miglioramento della notazione di Vieta. La stessa notazione fu adoperata dal Wallis anche nel 1685, ma unitamente alla moderna notazione degli indici, che fu introdotta da Descartes.

163. ***Oughtred,*** *1575-1660.* — Fra coloro, che contribuirono a fare generalmente adottare questi miglioramenti dell'algoritmo e dell'Algebra, fu Oughtred di Cambridge. La sua *Clavis Mathematicae, pubblicata* nel 1631, è un libro sistematico di Aritmetica; in esso introdusse il segno $\times$ per la moltiplicazione, $::$ per la proporzione; prima la proporzione $a : b = c : d$ era ordinariamente scritta così: $a - b - c - d$. Egli scrisse pure un trattato di Trigonometria, pubblicato nel 1657, in cui furono adoperate le notazioni pel seno, coseno ecc.

Digitized by Google

164. ***Lo sviluppo della Meccanica.*** — Gli ultimi anni del Rinnovamento furono notevoli per un risveglio negli studî di quasi tutti i rami delle scienze in genere ed in ispecie delle Matematiche. Per quanto riguarda le Matematiche pure abbiam veduto, che nell'ultima metà del XVI secolo vi fu un gran progresso nell'Algebra, nella teoria delle equazioni e nella Trigonometria; e ora vedremo che durante il secolo XVII in Geometria furono inventati nuovi procedimenti. Mentre se gettiamo uno sguardo sulle Matematiche applicate, si rimane colpiti nel vedere che la Statica dei solidi e l'Idrostatica circa al mezzo del XVI secolo ed alla fine di esso, erano presso a poco rimaste nello stesso punto, in cui le aveva lasciate Archimede; e la Dinamica ancora aveva da nascere. Stevino fu il primo a dare un nuovo impulso ai rinnovati studî della Statica, Galileo a gettare le fondamenta della Dinamica.

165. **Stevino,** *1548-1620.* — Ben poco conosciamo della vita di Stevino, all'infuori che egli fu da principio commesso presso un mercante di Amburgo e nell'ultimo periodo della sua vita l'amico fedele del Principe di Orange, il quale lo fece quartiermastro generale dell'esercito olandese.

Abbiamo già rammentato, che eglî aveva introdotto gli esponenti nella sua Aritmetica per indicare la potenza cui erano innalzate le quantità; per esempio l'espressione **3** ③ **—5** ①**+1**⓪ la scriveva così:

$$3\,x^2 - 5\,x + 1\ ;$$

e la sua notazione per le frazioni decimali era dello stesso genere; egli suggerí inoltre l'uso degli esponenti fratti (ma non negativi) ed un sistema decimale di pesi e misure.

166. Tuttavia la sua fama egli la deve alla sua *Statica ed Idrostatica,* pubblicata in fiammingo nel 1586. In quest'opera enunciò il triangolo delle forze, teorema credesi enunciato per la prima volta da Leonardo da Vinci. Stevino riguardò questo teorema come una proposizione fondamentale della sua opera. Prima della pubblicazione della sua opera, la Statica si fondava sulla teoria della leva; ma poi s'incominciò generalmente a far vedere come

Digitized by Google

le forze si potevano rappresentare mediante segmenti rettilinei e così ridurre molti teoremi di Statica a semplici proposizioni di Geometria, ed in particolare ottenere in questo modo la dimostrazione del parallelogramma o triangolo delle forze. Lo stile di Stevino era oscuro, ed il nuovo metodo di trattare la Statica non fu definitivamente adottato prima che comparisse, nel 1687, l'opera sulla Meccanica di Varignon. Stevino determinò pure la forza che deve essere esercitata lungo la linea di massima pendenza per sopportare sopra un piano inclinato un dato peso — problema che aveva dato luogo a lunghe dispute. Inoltre Stevino fece la distinzione fra equilibrio stabile ed equilibrio instabile. Studiò in Idrostatica la questione della pressione, che può esercitare un fluido, e spiegò il così detto paradosso idrostatico.

167. ***Galileo,*** *1564-1642*. — Per opera di una scuola che volle combattere Aristotile colle armi di Archimede (n. 47), dimenticando Giordano (n. 118) ed Archimede, la Scienza della Meccanica oscillava incerta fra il vecchio ed il nuovo; rintuzzata da un lato verso le ormai esauste sorgenti Alessandrine, spinta dall'altro verso vie nuove, ma nondimeno impraticabili senza il sussidio di più profond'analisi ed esperienza, quando sorse conquistatore sovrano del vero *Galileo Galilei* a raccogliere e fecondare del suo genio gli sparsi semi della nuova scienza e diffondere nel mondo un'onda nuova e potente di vita scientifica. Seguace di Platone in quanto sentenziava come il sommo greco non potersi studiare la natura senza la Geometria, ripudiò anche egli la vana dialettica aristotelica, che alcuni ristretti spiriti ancora tenevano per sublime fonte di verità, altamente affermando e collo esempio provando che la vera filosofia è scritta solo nel gran libro della natura. Fu appunto l'esperienza interpretata colla Geometria, controllata collo esperimento, il succo vitale del fecondo metodo *detto metodo sperimentale* (1) *galileliano;* non da lui scoperto, che è anzi antichissimo, ma efficacemente applicato e promosso; pel quale poi andò anche troppo

(1) Vedi la celebre « Storia del metodo sperimentale in Italia » — opera di Raffaele Caverni — in 6 grossi volumi.

Digitized by Google

famoso *Bacone da Verulamio*, che lo promosse sì e con qualche efficacia, specie presso i connazionali; ma più col Magistero della parola, quasi in severo abito di predicatore, che coll'esempio di varie ed importanti scoperte; di queste invece fu tutta piena la vita di Galilei, il quale può ritenersi il vero fondatore del Metodo Sperimentale o meglio della Filosofia naturale.

Come Stevino creò il metodo moderno di trattare la Statica, così Galileo fondò la Dinamica. Galileo discendeva da una nobile ed antica famiglia fiorentina; ma nacque a Pisa nel 1564 e morì a Fiesole presso Firenze nel 1642. All'età di diciassette anni, dopo avere compiuto gli studî nel monastero di Vallombrosa, andò a studiare medicina nella università di Pisa. Fu precisamente nel Duomo di questa città che egli osservò la gran lampada di bronzo, attaccata alla volta di questa cattedrale, che compieva le sue oscillazioni in tempi uguali, indipendentemente dalla loro ampiezza; e così scoprì la grande legge dell'*isocronismo del pendolo.*

Sino allora il padre lo aveva tenuto nelle Matematiche deliberatamente nella più oscura ignoranza; ma un giorno per caso sentendo una lezione di Geometria, fu così affascinato da quella scienza, che da quel dí in poi dedicò tutte le sue ore di libertà allo studio di essa. Finalmente potè ottenere dal padre di troncare il corso di medicina per potersi dedicare ai suoi studî prediletti, da cui era vivissimamente attratto. Lasciò l'Università nel 1586, e quasi subito incominciò le sue ricerche originali.

168. Nel 1587 pubblicò uno studio sulla bilancia idrostatica, e nel 1588 un saggio sul centro di gravità dei solidi. L'importanza di questi lavori gli procacciò fama e la cattedra di Matematica all'Università di Pisa. Nei tre anni di poi condusse a termine una serie di esperimenti, che faceva dalla torre pendente di Pisa sulla caduta dei gravi, tendenti a stabilire i principî fondamentali della Dinamica. Nel 1592 fu nominato professore all'Università di Padova, cattedra che tenne per diciotto anni di seguito. Pare che le lezioni, che egli fece in questo Ateneo, riguardassero principalmente la Meccanica e l'Idraulica; la sostanza di esse trovasi nel suo Trattato sulla Meccanica, che fu pubblicato nel 1612.

169. In queste lezioni Galileo dimostra che i gravi cadendo non

Digitized by Google

discendono come si credeva allora con velocità proporzionali, fra fra altre cose, ai loro pesi. Dimostrò inoltre che se si ammetteva che essi discendessero con moto uniformemente accelerato, se ne traevano subito le relazioni, che legano fra loro la velocità, lo spazio ed il tempo, e che ora conosciamo. D'altra parte osservando i tempi di discesa lungo i piani inclinati, potè constatare che questa ipotesi era vera. Dimostrò pure che la traiettoria di un proiettile era una parabola (1). Tuttavia le leggi del moto non le enunciò in nessun luogo definitivamente; onde Galileo può riguardarsi piuttosto come quello, che spianò la via a Newton, che come il vero creatore della scienza della Dinamica. Nella Statica egli enunciò il principio che « Nelle macchine, ciò che si guadagna in potenza, si perde in velocità e nello stesso rapporto ». Nella Statica de' solidi determinò la forza occorrente per reggere un dato peso sopra un piano inclinato; in Idrostatica formulò i più elementari teoremi sulla pressione e sui corpi galleggianti, e fra gli istrumenti di Idrostatica usò e forse inventò il termometro, quantunque in una forma alquanto imperfetta.

170. Non possiamo discorrere particolareggiatamente delle ricerche astronomiche di Galileo; accenneremo alle principali. Pare che nel 1609 Galileo abbia saputo che in Olanda era stato fabbricato un tubo, contenente delle lenti, il quale serviva ad ingrandire gli oggetti veduti attraverso ad esso. Ciò bastò a Galileo per ideare e costruir subito il telescopio, che porta il suo nome, del quale abbiamo un esempio in un ordinario canocchiale. Alcuni mesi dopo costruì istrumenti capaci di un ingrandimento di trentadue diametri; ed entro un anno egli così potè fare e pubblicare le osservazioni sulle macchie solari, sulle montagne della Luna, sui satelliti di Giove, sulle fasi di Venere e sull'anello di Saturno. Onde onori e premi gli piovvero d'ogni parte; nel 1610 potè rinunziare alla cattedra e ritirarsi a Firenze. Nel 1611 fece una visita temporanea a Roma, ove mediante il telescopio mostrò nei giardini vaticani nuovi mondi. Pare che Galileo abbia sempre creduto alla teoria di Copernico, pubblicata nel 1553,

(1) Pare però che il primo a fare questa dimostrazione fosse Guidobaldo del Monte (Vedi Appendice I[a]).

Digitized by Google

cioè che la Terra ed i pianeti ruotino intorno al Sole; ma temeva promulgando questa teoria di cadere nel ridicolo. Poichè l'esistenza dei satelliti di Giove sembrava renderne quasi certa la verità, allora egli la predicò arditamente. Il partito ortodosso si mostrò ostile a queste sue asserzioni tanto, che l' Inquisizione dichiarò che il supporre il Sole qual centro del sistema solare era assurdo, eretico e contro la sacra scrittura. L'editto del 5 marzo 1616, che sancisce ciò, non è stato mai revocato, sebbene sia stato da lungo tempo messo in tacere. È ben noto che i gesuiti lo rigirarono, considerando quella teoria come un'ipotesi, quantunque falsa, da cui si potevano dedurre certi risultati.

Nel 1632 Galileo pubblicò alcuni Dialoghi sul sistema del mondo, opera intitolata: « *I dialoghi di Galileo Galilei sui massimi sistemi* Tolemaico e Copernicano », nei quali espose la teoria di Copernico. In questi Dialoghi, evidentemente per la gelosia della fama di Keplero, non fece mai menzione delle leggi di quest'ultimo, e respinse la sua ipotesi, che le maree siano causate dall'attrazione della Luna. Egli fondò la dimostrazione dell'ipotesi di Copernico sull'assurda asserzione, che la causa delle maree doveva ricercarsi nelle differenti velocità delle diverse parti della Terra. Egli riuscì più felicemente a dimostrare che i principii della Meccanica si potevano spiegare col fatto seguente: « Una pietra lanciata verticalmente in alto doveva ricadere nel punto da cui era stata lanciata »; fatto che aveva precedentemente presentato una delle più grandi difficoltà nella spiegazione di ogni teoria, che supponeva la Terra essere in moto.

In questo *Dialogo* fa parlare tre persone: Salviati, Sagredo, partigiani di Copernico, e Simplicio difensore delle vecchie dottrine di Tolomeo, collo scopo di trattare con un artifizio, alquanto trasparente, dell'argomento contrario all'editto del 1616. Simplicio è l'uomo del passato, è l'immagine della immobilità volontaria. Galileo fa di lui un essere ridicolo ed infelice.

« Studiamo la natura » gli dice Salviati.

« A che potrebbe servire l'affaticarsi per ciò? Che cosa posso farne della natura? Io mi tengo a quello che dissero i nostri antichi, studio i dotti, ripeto le loro parole e dormo tranquillo ».

Ed in altro punto Galileo fa dire a Simplicio: « Basta essere

Digitized by Google

buon cristiano. Una santa ignoranza tien luogo di tutto. Non è da desiderarsi di sollevare tutti i veli ».

I Dialoghi scintillano di tratti fini, di allusioni satiriche e di profonde idee scientifiche. Questo bel libro non è soltanto un ammirabile trattato di Astronomia, ed un esempio di logica serrata e di bello scrivere, è un'arringa energica in difesa del libero esame dei fatti, un'opera degna di Socrate, che sarà sempre ammirata da chi apprezza l'indipendenza del giudizio e lo svolgimento delle idee. È una vittoria riportata dalla ragione sui nemici dell'umana coscienza.

Urbano VIII (Barberini) credette di riconoscere sè stesso in Simplicio, in quel tipo immaginato da Galileo a personificare i suoi avversari, personaggio ignorante e ridicolo, sempre attaccato al culto di ciò, che è per maledire e combattere ciò che deve essere.

Il papa irritato contro lo scienziato l'abbandonò alla Inquisizione.

La pubblicazione di questo libro fu contraria all'editto del 1616. Galileo fu per ciò chiamato a Roma, obbligato a discolparsi, a fare penitenza, e fu rilasciato soltanto in seguito alla promessa formale, che avrebbe obbedito. I documenti pubblicati recentemente provano che fu anche minacciato di tortura; ma non si ebbe forse il coraggio di sottoporvelo. Si racconta a proposito che quando Galileo uscì dal tribunale dell'inquisizione esclamasse crollando la testa: « Eppur si muove! »

Un'altra opera da ricordare agli Italiani è il *Saggiatore*, che in forma di lettera il Galilei diresse a monsignore Virginio Cesarini, dotto prelato ed amico grandissimo di Galilei, e contiene la confutazione di ciò che Lotario Sarsi (il gesuita Grassi) espose nella sua Libera astronomica intorno alla natura delle comete ed al loro andamento, apparse in quell'epoca (1618); esso è un modello di scrittura polemica, sia per l'ordine e la chiarezza, sia per l'eleganza e la venustà dello stile, modello pur troppo rarissimo ai giorni che corrono.

Nel 1638 pubblicò « I dialoghi delle nuove scienze » in cui fa parlare il fiorentino Salviati; il veneziano Sagredo ed il famoso Simplicio. Essi son divisi in sei giornate e trattano di Statica, Dinamica ed Idrostatica ecc.

Digitized by Google

Fu per ben tre volte processato. Pare che fino a poco tempo fa la Santa Sede avesse proibito di consultare nei suoi archivi l'incartamento riguardante i processi di Galileo, perchè essa non voleva che si sapesse che il *trattamento* usato allora a Galileo fu *troppo mite*, secondo il Papa: per lui era un segno di debolezza del Sant'Uffizio. Sembra persino impossibile!

171. Riassumendo diremo che le opere di Galileo riguardano le ricerche intorno alla Meccanica, che sono di gran pregio e memorabili, perchè enunciano chiaramente il grande principio, che la scienza deve essere fondata sulle leggi dell'esperimento; inoltre riguardano le sue osservazioni astronomiche; le deduzioni, che ne trasse furono splendide, e furono esposte con una valentìa letteraria veramente ammirabile; ed ogni giovanetto dovrebbe leggere « I suoi Dialoghi sui massimi sistemi tolemaico e copernicano », che costituiscono uno dei più belli esempi di stile didascalico e di Dialoghi, che vanti la nostra letteratura. Ma benchè rendesse vie più evidente la teoria di Copernico e la collocasse sopra una base più solida, tuttavia non fece fare gran progresso alla Astronomia di posizione.

Voglio qui riportare una bella definizione che egli dà della Geometria e della Fisica: « La metafisica delle Geometrie sta negli assiomi e nei postulati, quella delle fisiche nelle osservazioni e nelle esperienze »; ed anche un bel detto « Se l'uomo non sapesse di Matematica, non si eleverebbe di un sol palmo da terra ».

Voglio ricordare anche un curioso aneddoto. Pervenne al Doge un anonimo, in cui si accusava Galileo di tenere presso di sè una governante, cosa cotesta immorale per l'anonimo. Si sa che da tempo a Galileo era morta la moglie. Il Doge adunò il Consiglio dei Dieci, cui parlò in pretto veneziano così: « Povereto, mi non saveva che aveva da mantegné la governante; propongo di aumentargli di cinque zecchini lo stipendio mensile ».

172. ***Risveglio nello studio della geometria pura.*** — La fine del XVI secolo si segnalò non solo pel tentativo di trovare una teoria della Dinamica, fondata sulle leggi sperimentali, ma

Digitized by Google

anche per un risveglio nello studio della Geometria. Ciò fu dovuto in gran parte all'influenza di Keplero.

173. ***Keplero***, *1571-1630.* — Keplero, uno de' fondatori della Astronomia moderna, nacque da umili genitori vicino a Stuttgart; studiò a Tubinga; nel 1593 fu nominato professore a Grätz, ove conobbe una bella e doviziosa vedova, che sposò; ma s'avvide troppo tardi che si era procurata la liberazione dai fastidi peculiari a spese della propria felicità domestica. Nel 1599 accettò la nomina come assistente di Tycho Brahe, e nel 1601 succedette al suo maestro come Astronomo dell'imperator Rodolfo II. Ma la sua vita fu continuamente contrastata dalla cattiva fortuna; primieramente non gli fu pagato il suo stipendio; poi la moglie gli s'impazzì ed indi morì; tuttavia egli si ammogliò di nuovo nel 1611. Ma in questo secondo matrimonio fu anche più disgraziato che nel primo, poichè quantunque per assicurarsi una migliore scélta prendesse la precauzione preventiva di scegliere undici ragazze, i cui meriti e demeriti erano stati accuratamente analizzati in una carta, che tutt'ora esiste, tuttavia egli fece una brutta scelta; di più aggiungi che a completare la sua disgrazia fu espulso dalla cattedra, che occupava, ed a stento fu esente dalla condanna di eterrodossia. Durante questo tempo procurò di vivere col dire la buona fortuna e fare oroscopi, poichè come egli dice: « La natura che ha conferito ad ogni animale i mezzi di esistenza, ha designato l'Astrologia come un compimento e un alleato dell'Astronomia ». Tuttavia pare che non sia stato molto scrupoloso nel farsi pagare largamente i suoi servigi, e con grande sopresa de' suoi contemporanei fu trovato alla sua morte carico di danaro; morì mentre era in viaggio per tentare di ricuperare alcuni arretrati del suo stipendio a benefizio dei propri figliuoli.

173bis. L'opera di Keplero in Geometria consiste più in certi principii generali, che diede ed illustrò con alcuni esempi, che in una sistematica esposizione della materia. In un breve Capitolo sulle coniche, pubblicato nel 1604, enunciò il principio detto di *continuità;* e dà come un esempio la constatazione che una parabola è ad un tempo il caso limite di un'ellisse e di

Digitized by Google

un'iperbole; illustrò la stessa dottrina rispetto ai fochi delle coniche (la parola *focus* fu introdotta in geometria da lui); spiegò pure che le rette parallele si dovrebbero riguardare come intersecantesi all'infinito.

Nella sua *Steremometria*, pubblicata nel 1615, determinò i volumi di certi recipienti, e le aree di certe superficie, impiegando gl'infinitesimi o indivisibili in luogo del lungo e tedioso metodo delle esaustioni. I metodi adoperati da Keplero tuttavia non sono esenti da obiezioni, ma sostanzialmente essi sono esatti; e coll'applicare la legge di continuità agli infinitesimi preparò la via al metodo degli Indivisibili del Cavalieri ed al Calcolo Infinitesimale del Newton e del Leibniz.

174. Abbiamo più sopra detto che Keplero difese sempre l'uso dei logaritmi. Qui non possiamo discorrere dei suoi lavori di Astronomia; diremo solo che eran fondati sulle osservazioni di Tycho Brahe, di cui era assistente. Le sue tre grandi leggi del moto planetario furono il frutto di molti e laboriosi sforzi, i quali avevano per iscopo di ridurre i fenomeni del sistema solare a certe regole semplici. Le prime due furono pubblicate nel 1609, colle quali si veniva a stabilire che i pianeti descrivono elissi intorno al Sole, che occupa un foco, e la retta, che congiunge il Sole ed un pianeta qualunque, descrive la medesima area in tempi eguali. La terza fu pubblicata nel 1619, colla quale si veniva a stabilire, che i quadrati de' tempi periodici de' pianeti sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori delle orbite.

175. Non parmi inutile, nè fuori di luogo, di riportare qui alcuni detti celebri nelle Matematiche. Keplero disse che « La Geometria è eterna; essa esisteva prima del mondo nell'intelligenza del Creatore ». Democrito disse che « Il linguaggio delle Matematiche è quello degli Dei ». Ad un filosofo greco fu chiesto: « che cosa facesse Dio in cielo »; ed egli ripose: « *Θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν* » cioè « Dio geometrizza sempre ».

Ed il gran filosofo Cristiano Wolf « Studium mathematicum accuendum ingenium apprime necessarium pronunciamus et sine eo ad solidom rerum cognitionem perveniri negamus » cioè:

Digitized by Google

« Riconosciamo lo studio delle Matematiche, a preferenza di ogni altro, necessario ad acuire l'ingegno; ed affermiamo che non è possibile, senza di esso, ottenere solidità di cognizioni ».

Giovanni Locke lasciò scritto: « L'uso della Matematica è cosí grande in ogni condizione ed in ogni caso della vita, che appena si può fare qualche cosa scenza di esso, ed è evidente che un uomo non potrà mai saperne di troppo o troppo bene ».

Dante nel Convito (II, 14) dice: « che la Geometria è senza macula d'errore e certissima per sè » .

Galileo pensava essere « La Geometria maestra dell'onesto acquistare l'utile, il dilettevole, il bello ed il buono ».

Il Leibniz dice che « La Matematica rappresenta *l'onore dello spirito umano* ».

Leonardo Da-Vinci afferma che: « *Le scienze sono tanto più vere, quanto meglio s'informano ai metodi matematici* ».

Pascal dichiarò nei suoi Pensées che solo che: « *Tout ce, qui passe la géometrie, nous sourpasse* »; ma ancora che: « Nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles celui, qui a de la géometrie l'emport et acquiert une vigeur tout nouvelle ». Napoleone I disse « L'avancement e le perfectionement des mathématiques sont lie à la prosperité de l'État ».

« Amplissima et pulcherima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriae! » (Nicodemus Frischlinus in Dialogo I). — « Perspectivae methodus quâ nec inter inventas nec inter inventu possibiles alla compendiosior esse videtur ». (B. Pascal in lit. ad Acad. Paris, 1645). — Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis. Causa sed, utilitas officiumquem fuit ». (Ovidius in Fastis, III, 9).

175. ***Desargues***, *1593-1662*. — Mentre Keplero estendeva le nozioni della Geometria de' Greci, un francese, Desargues, che fino a poco tempo fa era sconosciuto, inventò un nuovo metodo per studiare la Geometria, metodo che ora chiamasi proiettivo. Ciò fu la scoperta di Desaurgues. Era ingegnere architetto: però dal 1621 circa al 1630 diede a Parigi alcune lezioni gratuite sulla geometria proiettiva, le quali fecero una grande impressione sui suoi contemporanei. Ma questo nuovo ramo della scienza

Digitized by Google

geometrica ben presto cadde in dimenticanza per causa principalmente della Geometria analitica di Descartes, la quale era mezzo più potente tanto per le dimostrazioni, quanto per iscoprire verità nuove. Molte delle ricerche di Desargues sono contenute nel suo *Brouillon project*, pubblicato nel 1639, cioè alcuni teoremi fondamentali sulla involuzione, sulla omologia, sui poli e polari e sulla prospettiva.

177. ***La scienza matematica alla fine del Rinascimento.*** — Ora possiamo dire che dall'inizio del XVII secolo i principii dell'Aritmetica, dell'Algebra, della Teoria delle equazioni e della Trigonometria furono esposti con un linguaggio ed in una maniera non molto diversi da quelli presentemente in uso, e che erano stati tracciati i contorni di questi differenti rami delle matematiche, come noi li conosciamo. Tuttavia gran parte della notazione algebrica e trigonometrica introdotta non era familiare ai Matematici, nè era quasi accettata da alcuno; ed il linguaggio di questi rami non fu definitivamente fissato, che verso la fine del XVII secolo.

Se riandiamo la Matematica applicata, troviamo d'altra parte che la scienza della Statica era già stata creata; ma nei diciotto secoli, che erano trascorsi dall'epoca di Archimede, aveva poco progredito; mentre le basi della Dinamica erano state gettate da Galileo solo alla fine del XVII secolo; infatti come vedremo in seguito la scienza della Meccanica fu posta su basi soddisfacenti solo all'epoca di Newton.

Digitized by Google

CAPITOLO IV.

La introduzione dell'analisi moderna.

178. ***L'inizio della nuova Êra.*** — L'invenzione dell'Analisi geometrica e del Calcolo infinitesimale può essere considerata come il principio della nuova êra. La prima fu adoperata da Descartes nel 1637; il secondo fu inventato da Newton circa trent'anni dopo. La scienza matematica di questo periodo è più complessa di quella degli altri periodi: durante un paio di secoli può in generale dirsi che fu caratterizzata dallo sviluppo dell'Analisi e dalla sua applicazione particolarmente ai fenomeni della Meccanica e dell'Astronomia.

179. **Descartes,** (*Cartesio*), *1596-1650*. — Descartes nacque presso Tours, e studiò nel famoso Collegio dei gesuiti alla Flêche. Nel 1612 lasciò il Collegio e venne a Parigi per gettarsi nel mondo della moda. A quei tempi ordinariamente un uomo od abbracciava la carriera delle armi o quella ecclesiastica; Descartes scelse la prima; e nel 1617 raggiunse l'esercito del Principe di Orange allora a Breda. Un dì camminando per le vie di questa città vide un cartello scritto in olandese, che richiamava l'attenzione del pubblico; e fermato il primo passeggiero, lo pregò che glielo traducesse. Il cartello conteneva la sfida a tutto il mondo di risolvere un certo problema geometrico, che Descartes risolvette in poche ore.

Digitized by Google

Questo improvviso saggio del suo ingegno matematico accrebbe in lui l'antipatia, che aveva per la vita militare; ma per l'influenza esercitata su di lui dalla famiglia e dalla tradizione egli rimase ancora per qualche anno nell'esercito. Finalmente nel 1621 diede le sue dimissioni, ed impiegò i successivi nove anni in viaggi e in istudî matematici.

Nel 1626 si stabilì a Parigi, ove è descritto dai suoi contemporanei come « Una piccola ma ben formata figura, modestamente vestita in seta verde; solo il portare indosso la spada e la piuma al cappello metteva in evidenza la sua qualità di gentiluomo ».

Due anni di poi si recò in Olanda per assicurarsi maggior quiete, ove visse per venti anni di seguito, dedicandosi intieramente allo studio della Filosofia e delle Matematiche.

La prima, egli dice, può paragonarsi ad un albero: è metafisica la radice, fisica il tronco, ed i tre rami principali sono la Meccanica, la Medicina e la Morale, formando queste le tre applicazioni della nostra scienza, cioè al mondo esteriore, al corpo umano ed al tenore di vita; i suoi scritti trattano unicamente di questi argomenti. I primi anni del suo soggiorno in Olanda li dedicò ad escogitare una teoria fisica dell'universo; ma considerando che la sua pubblicazione in proposito avrebbe probabilmente richiamato su di lui la ostilità della chiesa, e desiderando di non passar per martire, ne abbandonò l'idea.

Indi si dedicò a comporre un trattato sulla scienza dell'universo; esso venne pubblicato a Leida nel 1637 col titolo: « *Discours de la mèthode pour bien conduire sa raison et chercher la veritè dans les sciences* »; ad esso furono di poi aggiunte tre appendici, che sono: *la dioptrique*, *les météores*, et la *géometrie;* da quest'ultima data la invenzione della geometria analitica. Nel 1649 si recò in Isvezia dietro invito di quella regina, e vi morì pochi mesi dopo d'infiammazione polmonare.

Descartes era piccolo di persona, avea la testa grossa, ciglia sporgenti, naso prominente, capelli neri, che gli cadevano sulle sopracciglia; di temperamento freddo ed egoistico. Per quanto concerne il livello de' suoi studî, egli non era molto colto, e

Digitized by Google

spregiava ad un tempo quella scienza e quell'arte, dalle quali non si potesse trarre alcun che di reale (1).

180. Qui non possiamo discutere le teorie filosofiche di Descartes. Le principali contribuzioni, che egli portò alla Matematica, furono la sua Geometria analitica e la sua teoria dei vortici; la sua fama certo egli la deve in gran parte alle ricerche che fece nella prima.

181. Descartes fu il primo che nella Geometria analitica indicò come un punto in un piano potesse essere compiutamente determinato mediante le sue distanze x ed y, che chiamansi coordinate (ascissa od ordinata) da due rette fisse (assi) del piano perpendicolari fra loro, facendo la convenzione ordinaria dei segni $+$ e $-$ per i valori di esse per significare due direzioni opposte. Benchè un'equazione $f(x, y) = o$ sia indeterminata e possa essere soddisfatta da un numero infinito di valori per x ed y, tuttavia questi valori di x ed y determinano le coordinate di un numero di punti, che formano una curva, di cui l'equazione suddetta esprime qualche proprietà geometrica, cioè una proprietà della curva, che è vera per ogni suo punto. Descartes asserì pure che ogni punto dello spazio poteva essere determinato similmente mediante tre coordinate; ma egli studiò soltanto le curve piane.

Era facile veder subito, rispetto alla ricerca delle proprietà di una curva, che era sufficiente scegliere una proprietà geometrica caratteristica come definizione ed esprimerla mediante una equazione fra le coordinate (correnti) di qualunque punto di essa, ciòè di tradurre la definizione nel linguaggio della Geometria analitica.

L'equazione che si ha in questo modo, implicitamente contiene ogni proprietà della curva, e qualunque proprietà particolare di essa può dedursi da detta equazione mediante l'Algebra ordinaria, senza punto preoccuparsi circa la Geometria della

(1) Vogliamo qui ricordare un motto celebre di Descartes: « Donnez-moi l'ètundue et le mouvement, je costruirai le monde ».

Digitized by Google

figura. Sarebbe superfluo dilungarsi in questo argomento, poichè anche chi non abbia compreso quanto si è or ora detto, potrà in ogni modo apprezzare il valore del metodo.

182. La *Gèometrie* de Descartes è divisa in tre libri: il primo incomincia con un'esposizione dei principii della Geometria analitica, e contiene una discussione di un certo problema, che era stato proposto da Pappo, del quale il caso più importante è di trovare il luogo di un punto tale, che il prodotto delle perpendicolari a due rette date sia in un raporto costante col prodotto delle perpendicolari a due altre rette. Pappo trovò che il luogo era una conica, ma non diede la dimostrazione. Anche Descartes non ne diede una dimostrazione puramente geometrica; ma invece fece vedere, che la curva era rappresentata da un'equazione di 2° grado, cioè essa era una conica. Newton dipoi diede dello stesso problema un'elegante risoluzione mediante la geometria pura. Nel secondo libro Descartes studiò alcuni problemi riguardanti curve particolari, le loro tangenti e le loro normali.

182bis. Il terzo libro della *Géometrie* contiene un riassunto dell'Algebra allora in uso; ed in esso venne introdotto l'uso di adoperare le prime lettere dell'alfabeto per denotare le quantità note e le ultime per rappresentare quelle incognite; ed inoltre vi introdusse l'uso degli indici, come ora si adoperano. In questo libro Descartes applicò la regola, che porta il suo nome, per trovare un limite del numero delle radici positive e negative di un'equazione algebrica. Egli introdusse nell'Algebra il metodo dei coefficienti indeterminati per la risoluzione delle equazioni; e credesi che egli abbia dato un metodo mediante il quale si potevano risolvere le equazioni di qualunque grado; ma in ciò egli cadde in errore.

183. Delle due ultime Appendici ai Discours una fu dedicata all'Ottica; la parte più interessante di essa è quella che riguarda l'esposizione della legge di rifrazione; inoltre vi studiò la forma migliore da darsi alle lenti di un telescopio. Pare che Descartes

Digitized by Google

fosse incerto nel riguardare i raggi luminosi o come provenienti dall'occhio e come suol dirsi toccanti l'oggetto, come avevano creduto i Greci, od invece come procedenti dall'oggetto e così toccanti l'ochio; ma poichè egli riteneva infinita la velocità della luce, non seppe considerarne il punto particolarmente importante.

L'altra appendice tratta di certi fenomeni atmosferici, tra cui l'arco baleno; ma siccome egli non conosceva la differente rifrangibilità dei raggi luminosi di diversi colori, la spiegazione che ne diede è perciò incompleta.

184. La teoria fisica dell'universo di Descartes è fondata sulla ipotesi, che la materia dall'universo è in moto, il quale risulterebbe di un certo numero di vortici. Egli ammise che il Sole è il centro di un immenso vortice di questa materia, in cui galleggiano i pianeti e sono trascinati in giro come i fuscelli in un vortice d'acqua. Ciascun pianeta si suppone essere il centro di un vortice secondario, da cui sono menati in giro i satelliti; questi vortici secondari si suppongono produrre la variazione della densità nel mezzo circostante, che costituisce il vortice primario, e così costringono i pianeti a muoversi in elissi piuttosto che in cerchi. Queste ipotesi però non sono fondate sull'esperienza. È facile dimostrare mediante le sue ipotesi che il Sole sarebbe nel centro di queste elissi invece che in un foco, come aveva dimostrato Keplero, ed il peso di un corpo in ogni luogo della superficie terrestre, eccettuato l'equatore, agirebbe in una direzione non verticale. Tuttavia, ad onta della sua immaturità e de' suoi inerenti difetti, la teoria dei vortici segna una nuova epoca nell'Astronomia, poichè essa rappresenta un tentativo di spiegare i fenomeni dell'intiero universo colle stesse leggi della Meccanica, cui l'esperienza mostra essere vere sulla Terra.

185. Fra le opere postume di Descartes (Oeuvres inédites ecc.), pubblicate da Foucher de Careil nel 1860, si trova l'importante proposizione sui poliedri, che si attribuisce ordinariamente ad Eulero, cioè

$$f + v = s + 2,$$

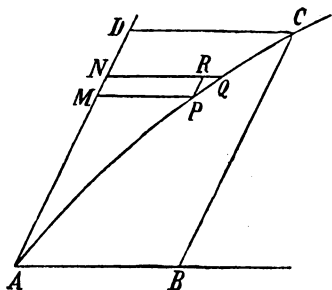
Digitized by Google

ove f indica il numero delle facce, s quello degli spigoli, v quello de' vertici; ma questo teorema venne alla luce la prima volta per opera del suo nuovo scopritore Eulero (1752); ecco perchè porta il suo nome.

186. ***Cavalieri,*** *1598-1647.* — Quasi contemporaneamente alla pubblicazione della *Géometrie* di Descartes nel 1637, vennero alla luce in Italia per opera di Cavalieri, professore di Matematica nell'università di Bologna, i principii del Calcolo integrale, riguardanti specialmente le sommatorie, mediante ciò, che allora si chiamava il principio degli indivisibili. Cavalieri applicò questo metodo ai problemi riguardanti la quadratura delle curve e delle superficie, la determinazione dei volumi e le posizioni dei centri di gravità, e lo sostituì quasi subito intieramente al tedioso metodo delle esaustioni, adoperato dai Greci. Rispetto al principio i due metodi sono gli stessi; ma la notazione degli indivisibili è più concisa e conveniente; ed alla sua volta esso fu sostituto dal calcolo integrale allo inizio del XVII secolo.

Anche Keplero nel 1604 e nel 1615 aveva adoperato in una forma alquanto grossolana il principio degl'indivisibili; però fu per la prima volta esplicitamente stabilito da Cavalieri nel 1629, quantunque non venisse pubblicato che nel 1635. Il metodo degli indivisibili consiste semplicemente in ciò: Qualunque grandezza può essere divisa in un numero infinito di piccole quantità, che possono avere un raporto qualunque fra loro (per esempio eguali). Per comprendere questo metodo, basterà darne un esempio: « Supponiamo che si voglia trovare l'area di un triangolo rettangolo ». Si divida la base in n indivisibili (o punti) e l'altro lato in na indivisibili; allora le ordinate dei successivi punti della base conterranno a, $2a$, $3a$... na indivisibili; perciò il numero degli indivisibili nell'area è $a+2a+....+na$, che è eguale a $\frac{1}{2}n^2a+\frac{1}{2}na$; ma poichè n è grandissimo, si può trascurare $\frac{1}{2}na$, che è piccolissimo rispetto ad $\frac{1}{2}n^2a$, e l'area così è: $\frac{1}{2}(na).n$ cioè $\frac{1}{2}$. altezza × base. È facile criticare tale dimostrazione; ma benchè la forma, in cui la si

Digitized by Google

presenta, non si possa in alcuna maniera difendere, tuttavia la sostanza è esatta. Diamo ancora un altro esempio di questo metodo, modificato e corretto mediante il metodo, dei limiti: « Si calcoli l'area determinata da un arco APC di parabola, dalla tangente in A e dal diametro DC ». Si completi il parallelegramma ABCD; divido AD in n parti eguali; AM ne contenga r e MN sia l'$(r+1)^{esima}$ parte.

Conducono MP e NQ parallela ad AB e PR parallela ad AD. Indi, allorchè n diviene infinitamente grande, l'area curvilinea APCD sarà il limite della somma di tutti i parallelogrammi PN. Ora

$$\text{area PN} : \text{area BD} = \text{MP} \times \text{MN} : \text{DC} \times \text{AD}.$$

Ma MN : AD = 1 : n; e dalle proprietà della parabola:

$$\text{MP} : \text{DC} = \overline{\text{AM}}^2 : \overline{\text{AD}}^2 = r^2 : n^2.$$

Quindi

$$\text{MP} \times \text{MN} : \text{DC} \times \text{AD} = r^2 : n^3;$$

perciò:

$$\text{area PN} : \text{area BD} = r^2 : n^3$$

Onde da ultimo avremo:

$$\frac{\text{area APCD}}{\text{area BD}} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots. + (n-1)^2}{n^3} =$$

Digitized by Google

$$= \frac{\frac{1}{6}\, n(n-1)-(2n-1)}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

quando è $n = \infty$. (Questo ∞ vuol dire infinito).

187. ***Mengoli***, *1625-1686.* — Pietro Mengoli nato e morto a Bologna fu uno dei migliori allievi di Cavalieri: e per dichiarazione sua fu Priore di Santa Maddalena, Professore di Meccanica nel Collegio dei nobili, Filosofo collegiato e Dottore in legge. Le sue opere di Matematica pura sono: Novae quadratura arithmetica (Bononiae, 1650); Via regia ad mathematica (Id. 1659); Geometria speciosa (Id. 1659); Circolo del Mengoli (Idm. 1672); De arithmeticae rationalis elementis quatuor (Idm. 1674).

Nella prima sono trattate le serie in generale, con distinzione di quelle che sono divergenti (fra cui la serie armonica) da quelle di cui si può trovare la somma (specie quella degli inversi dei numeri triangolari). A torto il Montucla ascrisse il Mengoli fra i pretesi quadratori del cerchio, che nelle 4ª delle opere citate egli espone la nota espressione di π in un prodotto infinito scoperto dal Wallis, (autore che egli non cita, ma che indubbiamente conobbe). Nella *Geometria speciosa* egli introdusse una simbolica particolare in uso del calcolo integrale, e se ne servì nel calcolo degli integrali, di differenziali binomi ad esponenti interi e positivi. A lui finalmente si è debitori di un'originale teoria dei logaritmi, la quale fra l'altro, lo condusse alla formule notevole seg.:

$$\log \frac{m}{n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{s=m} \frac{1}{rm+s} - \sum_{s=1}^{s=m} \frac{1}{rn+s} \right\}.$$

188. ***Pascal,*** *1623-1662.* — Fra i contemporanei di Descartes nessuno rivelò maggiore ingegno naturale di Pascal. Da fanciullo dimostrò una precocità eccezionale; e la famiglia per garentirsi che non si affaticasse di troppo nello studio, lo tenne sempre nella propria casa. La sua istruzione da principio fu limitata allo studio delle lingue, e gli fu proibito di leggere qualunque libro di Matematica. Questa proibizione naturalmente eccitò la

Digitized by Google

sua curiosità; un giorno, aveva appena dodici anni, domandò in che cosa consistesse la Geometria. Il suo pedagogo gli rispose che era la scienza di costruire esattamente le figure e di determinare i rapporti fra le loro differenti parti. Pascal senza dubbio stimolato dalla proibizione di non leggere i libri che riguardavano questa scienza, dedicò le sue ore di libertà a questo nuovo studio; ed in poche settimane scoprì da sè molte proposizioni sulle figure, ed in particolare la proposizione che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. Il padre meravigliato dell'ingegno del proprio figliuolo, gli accordò finalmente di studiare le Matematiche, ove fece rapidi progressi.

Pascal all'età di quattordici anni veniva ammesso alle adunanze ebdomadarie dei geometri francesi, dalle quali ebbe poi origine l'Accademia francese. Al sedicesimo anno scrisse un *saggio sulle sezioni coniche;* al diciottesimo costrusse la prima macchina aritmetica, che otto anni di poi migliorò e fece brevettare; e dalla sua corrispondenza con Fermat risulta che in questo tempo studiava ancora la Geometria analitica e la Fisica.

Nel 1650, allorchè era in mezzo a tali ricerche, abbandonò istantaneamente i suoi ozî favoriti per dedicarsi a tutt'uomo allo studio della religione, e come egli diceca nei suoi *Pensées* « Per contemplare la grandezza e la miseria dell'uomo ». Ma tre anni dopo, quando fu costretto ad amministrare il patrimonio del padre, ritornò allo studio della Matematica e della scienza. Verso la fine del 1656, mentre guidava la sua carrozza a quattro, i cavalli spaventati si misero a corsa sfrenata, andarono ad urtare violentemente nel parapetto del ponte di Neuilly: Pascal cadde nel fiume, e si salvò a stento sui rottami della carrozza.

Sempre alquanto mistico, Pascal considerò questo accidente come uno special segno di abbandonare il mondo: scrisse un breve racconto del fatto sopra un pezzetto di pergamena, che portò per il rimanente della sua vita al petto vicino al cuore per ricordarsi del voto, che aveva fatto in quella circostanza. Poi si ritirò nel monastero di Port-Royal, ove rimase fino alla morte.

Di costituzione delicatissima si danneggiò non poco la malferma salute collo studio incessante; fino dall'età di sedici o diciotto anni soffriva già d'insonnia e di acuta dispepsia.

Digitized by Google

189. Pare che il suo primo saggio sulla Geometria delle coniche, scritto nel 1639, ma pubblicato solo alla fine del 1779, sia stato fondato sull'insegnamento di Desargues. Due dei risultati ivi esposti sono importanti, quanto interessanti. Il primo è il teorema conosciuto ora come « Il teorema di Pascal », cioè che « Se un esagono è inscritto in una conica, i punti d'intersezione dei lati opposti giacciono in una retta ». Il secondo, che realmente è dovuto a Desargues, è il teorema seguente: « Se un quadrilatero è inscritto in una conica e si tira una secante a tagliare i lati, presi in ordine nei punti A, B, C, D e la conica in P, Q, allora si ha:

$$PA \times PC : PB \times PD = QA \times QC : QB \times QD.$$

190. Il triangolo aritmetico di Pascal fu scritto nel 1653, ma non fu pubblicato che alla fine del 1665; eccolo: I numeri di ciascuna diagonale dànno i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio; inoltre esso ci mette in grado di scrivere lo sviluppo di $(a+b)^n$, se si conosce quello di $(a+b)^{n-1}$. Pascal usò il suo triangolo specialmente a tale oggetto, e particolarmente per trovare il numero delle combinazioni di m oggetti presi n ad n, che egli trovò essere esattamente:

$$\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ldots.m}{(m-n)!} \text{».}$$

191. Come matematico Pascal è forse meglio conosciuto per la corrispondenza che ebbe con Fermat nel 1654, colla quale egli gettò i principî della teoria delle probabilità. Questa corrispondenza ebbe origine da un problema proposto da un biscazziere, il Chevalier de Méré, a Pascal, che lo comunicò a Fermat. Il problema è il seguente: « Due giuocatori di capacità eguale desiderano di abbandonare il giuoco prima che finisca la loro partita. I punti fatti da ciascuno ed il numero dei punti che costituiscono la partita essendo dati, si domanda di trovare in qual proporzione essi si dovrebbero divedere le poste ». Pascal e Fermat si accordarono sulla risposta, ma diedero dimostrazioni diverse. La soluzione di Pascal è lunga, ma il principio di essa può ricavarsi

Digitized by Google

dalla sua discussione del caso semplice, ove i due giuocatori di ugual valore A e B giuochino una partita di tre punti: ciascuno aveva depositato trentadue pistole (1). Suppongasi che A abbia guadagnato due punti e B un punto; quindi se B vince il punto rimanente, allora essi sono alla pari; se tralasciano di giuocare, ciascuno dovrebbe prendere trentadue pistole. Ma se A vince l'altro punto, egli guadagna sessantaquattro pistole e B nulla. Così se A vince, sessantaquattro pistole spettano a lui; e se egli perde, allora trentadue pistole toccano a lui. Se perciò A e B desiderano dividere senza giuocare ancora, A potrebbe dire a B: « Io sono sicuro di trentadue pistole, e così per le altre trentadue pistole forse le avrò e forse potreste averle voi: le probabilità sono eguali. Dividiamoci adunque queste trentadue pistole egualmente, e datemi pure le trentadue pistole, di cui io son sicuro ». Così A avrà quarantotto pistole e B sedici pistole ecc. Pascal risolve poi simile problema, quando la partita sia vinta dal primo qualunque dei due che faccia $m + n$ punti, mentre l'altro ne abbia n ».

192. L'ultimo lavoro di Matematica di Pascal fu sulla cicloide, che è la curva generata da un punto della circonferenza di un cerchio, che ruzzola sopra una retta. Galileo nel 1630 aveva richiamato l'attenzione su questa curva. Quattro anni dopo Roberval ne trovò l'area. Parecchie questioni si collegano a questa curva; ed in seguito furono proposti de' problemi riguardanti la superficie ed il volume generati dalla sua rotazione intorno al proprio asse, alla base, alla tangente, al vertice ecc. Questi problemi ed altri analoghi, come la determinazione dei baricentri dei solidi, formati da essa, furon risolti nel 1658 da Pascal, ed i risultati furono pubblicati come una sfida al mondo. Wallis riuscì a risolvere tutte le questioni proposte all'infuori di quelle riguardanti i baricentri. Pascal risolvette i problemi proposti da lui col metodo degli indivisibili, come avrebbe fatto un matematico moderno coll'aiuto del Calcolo integrale. Mediante le sommatorie trovò a che cosa sono

(1) La pistola era una moneta di ragguaglio di quest'epoca e ve n'erano del valore di 10 e 20 lire circa.

Digitized by Google

equivalenti gl'integrali di sen φ sen^2 φ e φ **sen** φ, un limite essendo o zero o $\frac{1}{2}\pi$.

193. ***Wallis,*** *1613-1703.* — Wallis era figlio primogenito del vicario di Ashford, uomo di assai agiata condizione. Da giovinetto fu mandato alla scuola Felstead, ed un dì nei giorni di vacanza, quando aveva quindici anni, gli avvenne di vedere nelle mani di suo fratello un libro di Aritmetica; preso da curiosità pei segni + e = e per gli altri simboli di esso, si fece prestare il libro, ed in due settimane coll'aiuto del fratello s'impadronì della materia. Avendo stabilito la sua famiglia di fargli percorrere la carriera di dottore, andò a studiare a Cambridge, ove tenne una conferenza sulla circolazione del sangue; e dicesi che questa era la prima volta che in Europa in un pubblica disputa si sostenesse questa teoria; ma tuttavia Wallis si dedicava sempre agli studî matematici. Egli aderì al partito puritano, a cui rese grandi servigi, decifrando i dispacci realisti; ma poi entrò negli ordini religiosi e si legò ai moderati presbiteriani in segno di protesta contro l'esecuzione di Carlo I; onde egli suscitò negli Indipendenti ostilità continue. Ad onta della loro opposizione Wallis fu nominato nel 1649 alla cattedra saviliana di Geometria in Oxford, ove visse fino alla morte, che avvenne nel 1703.

I suoi lavori di Matematica sono importanti specialmente per l'introduzione dell'uso delle serie infinite come parte ordinaria dell'Analisi, e particolarmente pel fatto, che essi misero in evidenza e spiegarono a tutti gli studiosi i principî de' nuovi metodi di Analisi, che erano stati formulati dai suoi contemporanei e dai suoi predecessori immediati. Wallis scrisse ancora di Teologia, di Logica e di Filosofia, e fu il primo ad inventare un metodo d'insegnamento pei sordomuti.

194. La più importante delle sue opere matematiche è l'*Arithmetica Infinitorum*, pubblicata nel 1656, nella quale furono ordinati ed estesi i metodi analitici di Descartes e quelli di Cavalieri; ma la esposizione è alquanto difettosa. Incomincia col dimostrare la legge degli indici; poi che x^0, x^{-1}, x^{-2},... rappresentano rispettivamente 1, $\frac{1}{x}\frac{1}{x^2}$...; $x^{\frac{1}{2}}$ la radice quadrata di

Digitized by Google

x; $x^{\frac{2}{3}}$ la radice cubica di x^2; ed in generale che x^{-n} rappresenta $\frac{1}{x^n}$ e $x^{\frac{p}{q}}$ rappresenta la radice q^esima di x^p. Col metodo degli indivisibili trovò l'area compresa fra la curva $y = x^m$, l'asse delle x ed un'ordinata qualunque $y = h$; e fece vedere, che si potevano ottenere risultati simili per ogni curva delle forma $y = \Sigma\, a\, x^m$; e finalmente dimostrò che può determinarsi la quadratura di una curva, se la sua ordinata y può essere sviluppata in potenze dell'ascissa x.

195. Tre anni dopo pubblicò un Trattato sulle soluzioni dei problemi della cicloide, che erano stati proposti da Pascal. In esso egli fece vedere come i principî esposti nella sua *Arithmetica Infinitorum* potevano essere usati per la rettificazione delle curve algebriche, e vi diede una soluzione del problema di rettificare la parabola semicubica $x^3 = a\, y^2$, che era stata scoperta nel 1657 dal suo allievo Guglielmo Neil. Questo fu il primo caso, in cui venne determinata da' Matematici la lunghezza di una curva; e ciò è tanto più importante, quando si pensi che tutti i tentativi di rettificare l'elisse e l'iperbole erano necessariamente riusciti infruttuosi; onde era stato previamente supposto, che nessuna curva poteva essere rettificata; e infatti ciò aveva definitivamente asserito anche Descartes. La cicloide è stata la seconda curva, che venne rettificata nel 1658 da Wren.

Fu fatta prima del 1658 da van Heuraët una simile scoperta indipendentemente da quella di Neil, la quale venne pubblicata nel 1659 da von Schooten nella sua edizione della *Géometrie* di Descartes.

196. ***Fermat**, 1601-1665*. — Mentre Descartes gettava le fondamenta della Geometria analitica, questo stesso soggetto era studiato profondamente da un altro illustre Matematico francese, Pietro Fermat. Egli nacque presso Montauban da un ricco commerciante di corami. Fu istruito in casa; e nel 1631 ottenne il posto di conciliatore nel locale parlamento di Tolosa, ove attendeva ai suoi doveri di ufficio con scrupolosa esattezza e fedeltà; e nelle ore di libertà si dedicava allo studio delle Matema-

Digitized by Google

tiche; quivi passò tutto il rimanente della sua vita. All'infuori di pochissime Memorie isolate Fermat non pubblicò nulla durante la sua vita, nè diede nessuna esposizione sistematica dei suoi metodi.

197. Pare che lo studio favorito per Fermat fosse la teoria dei numeri; gli esempî seguenti illustreranno la natura delle sue ricerche.

I. Se p è un Np (1) ed a è primo con p, allora $a^{p-1}-1$ è un $N \times p$.

II. Un Np (maggiore di 2) può rappresentarsi come la differenza di due quadrati interi in un modo ed in un modo solo.

III. Ogni Np della forma $4N_0+1$ si può rappresentare, ed in un sol modo, come somma di due quadrati.

IV. Nessun sistema di valori interi per x, y, z può trovarsi, che soddisfi l'equazione:

$$x^n + y^n = z^n,$$

se n è un Np maggiore di 2.

Questa proposizione ha acquistato una celebrità straordinaria pel fatto, che nessuna dimostrazione generale di essa è stata data fin qui; ma non àvvi alcuna ragione da dubitare, che essa non sia vera (2).

198. Dalla corrispondenza di Fermat parrebbe, che egli indipendentemente da Descartes e forse prima del 1628, avesse escogitato i principî della Geometria analitica ed avesse fatto vedere anche come tutte le proprietà di una curva si potessero dedurre dalla sua equazione, che egli chiamava « *La proprietà specifica* »; ma ciò non fu pubblicato fin dopo il 1637. Le Memorie esistenti di Fermat sulla Geometria trattano principalmente dell'applicazione degli infinitisimi alla determina-

(1) Con Np si rappresenta un numero primo.

(2) Vedi la mia Memoria bibliografica sull'ultimo teorema di Fermat con un'Appendice, pubblicata nel Periodico di matematica Tomo XVI, Gennaio-Febbraio 1901, ed agosto-settembre 1901.

Digitized by Google

zione delle tangenti alle curve, alla quadratura di esse e alle questioni di massimo e minimo.

199. Fermat si divide con Pascal l'onore di aver creato la teoria delle probabilità. Più sopra abbiamo rammentato il problema proposto a Pascal, il quale lo comunicò poi a Fermat, ed abbiamo anche dato la soluzione di Pascal. La soluzione di Fermat dipende dalla teoria delle combinazioni; diamone un esempio. Consideriamo il caso di due giuocatori A e B, ove ad A mancano due punti per vincere ed a B tre. La partita sarà dunque certamente decisa in quattro prove. Si prendano le lettere *a* e *b* e si scrivano tutte le combinazioni, che si possono formare con quattro lettere. Queste combinazioni sono sedici, cioè:

aaaa, *aaab*, *aaba*, *aabb;* *abaa*, *abab*, *abba*, *abbb;*
baaa, *baab*, *baba*, *babb;* *bbaa*, *bbab*, *bbba*, *bbbb*.

Ora ogni combinazione, in cui comparisce *a* due o più volte, rappresenta un caso favorevole ad A; ed ogni combinazione, in cui *b* comparisce *tre* o più volte, rappresenta un caso favorevole per B. Così contandoli si trova che vi sono undici casi favorevoli ad A e cinque a B; e poichè questi casi sono tutti egualmente possibili, la probabilità di A di vincere la partita è a quella di B come 11 : 5.

La fama di Fermat è affatto unica nella Storia della scienza. I problemi sui numeri da lui proposti sfidarono tutti gli sforzi per risolverli, e molti di essi cedettero solo davanti al genio di Eulero; uno tutt'ora rimane insoluto. Questo fatto straordinario ha adombrato qualunque altra sua opera; ma infatti essa è di altissima importanza, e possiamo solo dolerci che egli pensasse cosí poco ad ordinarla ed a scriverla.

200. ***Huygens,*** *1629-1695*. — La vita di questo grande Matematico olandese non fu troppo fortunata ed è un mero ricordo delle sue varie memorie e ricerche. Nel 1651 pubblicò un saggio, ove mostrò la fallacia di una quadratura del cerchio proposta da Grégoire de Saint-Vincent, che era assai versato nella Geo-

Digitized by Google

metria greca, ma non afferrò i punti essenziali dei metodi più moderni. Questo saggio fu seguito dai Trattati sulla quadratura delle coniche e sulla rettificazione del cerchio. L'opera sua più importante è il suo *Horologium Oscillatorium*, pubblicata nel 1673. Il primo Capitolo è dedicato agli orologi a pendolo, che inventò nel 1656; gli orologi che erano prima in uso consistevano in orologi a bilancere. Il secondo Capitolo contiene un compiuto ragguaglio sulla caduta de' gravi sotto l'impulso del proprio peso, cadendo nel vuoto, o verticalmente, o lungo curve piane: dimostrò che la cicloide è *tautocrona*. Nel terzo Capitolo definì le evolute e le involute; dimostrò alcune delle loro proprietà più elementari, ed illustrò i suoi metodi col determinare le evolute della cicloide e dalla parabola: questi sono i primi esempi, ne' quali fu determinato l'inviluppo di una linea mobile. Nel quarto Capitolo risolvè il problema del pendolo a compensazione, e dimostrò che i centri di oscillazione e di sospensione si possono invertire. Nel quinto ed ultimo Capitolo studiò pure la teoria degli orologi; osservò che se il ciondolo del pendolo fosse fatto mediante sospensioni cicloidali, da potere oscillare in una cicloide, le oscillazioni sarebbero isocrone, e terminò col dimostrare che la forza centrifuga di un grave, che si muove sopra un circolo di raggio r con una velocità uniforme v, varia direttamente come v^2 ed inversamente come r. Quest'opera contiene il primo tentativo di applicazione della Dinamica ai gravi di grandezza finita e non semplicemente a punti.

201. Huygens nel 1689 si recò dall'Olanda in Inghilterra per far la conoscenza di Newton, i cui *Principia* erano stati pubblicati nel 1687, de' quali egli aveva subito riconosciuto la grande importanza. Al suo ritorno pubblicò il suo Trattato sulla luce, in cui espose la teoria ondulatoria, secondo la quale lo spazio sarebbe riempito di un etere estremamente raro, e la luce sarebbe prodotta da una serie di onde di etere, il quale sarebbe messo in moto dalle vibrazioni de' corpi luminosi. Mediante questa teoria Huygens potè dedurre le leggi di riflessione e di rifrazione, spiegare i fenomeni della doppia rifrazione e dare una costruzione pel raggio singolare dei cristalli biassali.

Digitized by Google

202. ***Altri matematici di quest'epoca.*** — Avvicinandosi ai tempi moderni la Storia delle Matematiche diviene sempre più complessa ed il numero di coloro, che le coltivarono, divenne maggiore. Si possono ricordare non pochi scrittori della prima metà del XVIII secolo, i quali estesero i limiti della materia e prepararono ai loro successori la via ad ulteriori scoperte; e fra i quali *Mersenne* 1588-1648; von *Schooten*, che morì nel 1661; *Torricelli* 1609-1647; *Hudde* 1638-1704; *Nicolas Mercator*, che morì nel 1687; *Barrow* 1630-1677, che fu il predecessore di Newton nella cattedra lucassiana a Cambridge; il Visconte *Brounker* 1620-1684, che familiarizzò l'uso delle frazioni continue, che erano state introdotte nelle Matematiche da Cataldi nel 1613, e mise π sotto la forma di frazione continua seguente:

$$\frac{4}{1} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + $$

Giacomo Gregory 1638-1675, l'inventore del telescopio a riflessione, e *De la Hire* 1640-1719, *Wren* 1632-1723; *Hooke* 1635-1703; *Collins* 1625-1683; *Pell* 1610-1685; *Sluze* 1622-1685; *Tschirnhausen* 1631-1708; *Roemer* 1644-1710; *Rolle* 1652-1719, celebre pel teorema di Algebra che porta il suo nome.

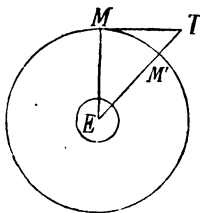
203. **Newton**, *1642-1727*. — *Isacco Newton* nacque in Lincolnshire presso Grantham nel 25 dicembre 1642, precisamente nell'anno, in cui morì Galileo; e morì a Kensington, Londra, il 2 marzo 1727. Studiò nel Collegio della Trinità a Cambridge, ove dimorò dal 1661 fino al 1696; ed in questo tempo scrisse gran parte delle sue opere di Matematica. Nel 1696 fu impiegato in un importante uffifficio governativo, e poi si recò a Londra, ove risiedette fino alla sua morte. Il suo gran genio fu tale da far non solo progredire ogni ramo delle matematiche discipline fino allora conosciuti, ma anche crearne de' nuovi.

204. Quando Newton andò a Cambridge non sapeva nulla di Matematica; ma entro quattro anni divenne un Matematico compiuto. Un manoscritto, che tutt'ora esiste e che porta la data 28 maggio 1665, compilato nello stesso anno in cui ricevette

Digitized by Google

il grado accademico, contiene il primo ragguaglio della sua invenzione delle flussioni. E fu circa la stessa epoca che scoprì il teorema del binomio; l'anno e mezzo successivi furono assai fecondi di scoperte importantissime. In esse egli espose il calcolo delle flussioni quasi compiutamente; immaginò gl'istrumenti per affilare le lenti e darle altre forme speciali oltre la sferica; forse decompose la luce solare nei diversi colori, e trovò i principî fondamentali della sua teoria della gravitazione.

205. Senza entrare in troppi particolari ecco il ragionamento che faceva a quell'epoca (1666) sulla gravitazione. Egli conosceva quella gravità, che era stata determinata sulle cime delle più alte montagne, e ne inferiva che essa poteva estendersi benissimo alla Luna e che essa era la forza, che faceva muovere la Luna nella sua orbita attorno alla Terra. Per verificare una tale ipotesi procedeva così: Egli sapeva che se si supponeva che una pietra fosse caduta vicino alla superficie della Terra, l'attrazione della Terra, cioè il peso della pietra, la faceva muovere con una velocità di 16 piedi al secondo.

L'orbita della Luna rispetto alla Terra è presso a poco un

cerchio, e con questa approssimazione alquanto grossolana, egli potè determinare la distanza della Luna e quindi calcolare la lunghezza della sua orbita ed il tempo, che la Luna impiega per ruotare intorno a sè stessa, cioè un mese. Quindi potè facilmente determinare la sua velocità in qualunque punto come per es. M; dunque potè calcolare la distanza MT, per cui si muoverebbe durante un secondo, se non fosse stata soggetta alla attrazione della Terra; ma alla fine di quel secondo era tuttavia in M'; onde la Terra l'avrebbe attratta per la distanza TM' in un secondo, sup-

Digitized by Google

ponendo costante la direzione dell'attrazione terrestre. A questo punto Newton aveva già osservato, che se la terza legge di Keplero era vera, l'attrazione della Terra su di un corpo doveva decrescere coll'aumentare la sua distanza dal centro della Terra. Ora se questa era la legge effettiva e la gravità la sola forza, che tratteneva la Luna nella sua orbita, allora TM′ stava a 16 piedi come l'inverso del quadrato della distanza della Luna dal centro della Terra stava al quadrato del raggio della Terra. Nel 1679 allorchè rifece la ricerca, TM′ fu trovata avere il valore richiesto dalla ipotesi, e così la verificazione fu completa; ma il calcolo, che fece nel 1666 della distanza della Luna era inesatto; e quando lo rifece trovò che TM′ era circa un ottavo minore del valore che doveva avere secondo la sua ipotesi. Ma questa discrepanza non iscosse punto la sua fede nel credere che la gravità si estendeva alla Luna e variava in regione inversa dal quadrato della distanza; ma pare che egli dubitasse che agisse oltre la gravità sulla Luna qualche altra forza, probabilmente i vortici di Cartesio.

206. Nel 1667 Newton fu eletto professore nella cattedra del suo Collegio, e prese permanente residenza a Cambridge; e due anni dopo Barrow rassegnò la sua cattedra lucassiana in suo favore. Mentre occupava la cattedra, Newton aveva l'abitudine di fare durante l'anno lezione pubblicamente una volta la settimana per mezz'ora od un'ora ed in modo che i suoi allievi potessero prendere gli appunti. Nella settimana successiva alle lezioni poi era uso dedicare quattro ore alle conferenze, che egli dava a quegli allievi, che desideravano andare a casa sua a discutere i risultati delle lezioni precedenti. Mai ripeteva uno stesso corso, e generalmente le lezioni di un dato corso incominciavano dal punto, in cui era stato terminato il precedente. Ancora esistono i manoscritti delle sue lezioni di diciassette anni, all'infuori di quelle dei primi otto anni della sua titolarità alla cattedra.

207. Come fu nominato professore Newton scelse l'ottica per argomento delle sue lezioni e delle sue ricerche; e prima della fine del 1669 aveva già preparato il materiale della sua scoperta della scomposizione di un raggio di luce bianca in raggi di

Digitized by Google

differenti colori mediante un prisma; dalla quale scoperta ne consegue la spiegazione dell'arco baleno. Per una curiosa sequela di casi Newton non riuscì a correggere l'abberazione cromatica di due colori mediante una coppia di prismi; onde abbandonò la speranza di poter fare un telescopio rifrangente, che fosse acromatico; invece immaginò un telescopio a riflessione. Nel 1672 inventò un miscroscopio a riflessione, e qualche tempo dopo inventò il sestante.

208. Newton poi si pose ad esaminare il problema « In qual modo fosse prodotta la luce »; ed alla fine del 1675 enunciò la teoria corpuscolare o dell'emissione. Si conoscevano solo tre modi, mediante i quali poteva prodursi meccanicamente la luce. O l'occhio può supporsi emettere qualche cosa che per così dire tocchi l'oggetto, come credevano i Greci, o l'oggetto veduto potesse emettere qualche cosa, che incontri o tocchi l'occhio, come supponesi nella teoria della emissione, o possa esservi qualche *mezzo* fra l'occhio e l'oggetto, il quale possa produrre qualche cambiamento nella forma o condizione di questo *mezzo* e così poi agire sull'occhio, come si suppone nella teoria ondulatoria. Colla teoria dell'emissione e con quella ondulatoria si spiegano tutti i fenomeni più semplici dell'ottica geometrica come la riflessione, la rifrazione ecc. Ora si sa che la teoria newtoniana non regge più; quantunque pare che ora si ritorna ad essa; però si può sempre osservare che Newton la considerò come una semplice ipotesi, da cui si potevano ottenere certi risultati. Sembrerebbe inoltre che egli ritenesse la teoria ondulatoria essere intrinsicamente più probabile dell'altra; ma la difficoltà, che incontrò nello spiegare la diffrazione con quella teoria, lo condusse ad ammettere l'altra ipotesi.

209. Due lettere scritte da Newton nel 1676 sono molto interessanti, perchè dànno un sommario della storia de' metodi di Analisi. In risposta ad una domanda fattagli da Leibniz Newton gli scrisse nel 13 giugno 1676, dando un breve ragguaglio dei suoi metodi per isviluppare in serie le funzioni, aggiungendovi il teorema del binomio, lo sviluppo di $\text{sen}^{-1}x$ e di $\text{sen}x$, ed una espressione per la rettificazione di un arco elittico in una serie

Digitized by Google

infinita, In una seconda lettera esplicativa, colla data 23 ottobre 1676, asserì che egli aveva usato in tutto tre metodi per lo sviluppo in serie. Col primo metodo era arrivato a considerare le serie delle espressioni $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$ ....., da cui dedusse, mediante le interpolazioni, la legge che riguarda i coefficienti successivi negli sviluppi di $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ . . . ; cosí ottenne l'espressione per il termine generale nello sviluppo di un binomio, cioè il teorema binomiale, che egli verificò in più modi. Avendo stabilito questo risultato, quindi (prima del 1665-6) mise da banda il metodo d'interpolazione in serie, ed impiegò il secondo metodo del suo teorema binominale per esprimere, quando era possibile, la ordinata di una curva in una serie infinita di potenze crescenti dell'ascissa; e così col metodo di Wallis potè ottenere le espressioni in serie infinita delle aree e degli archi di curva. Poi fece vedere, che vi era anche un terzo metodo, di cui circa 1669 aveva inviato un saggio a Barrow ed a Collins, illustrato con applicazioni sulle aree, sulla rettificazione, sulla cubatura ecc. Questo era il famoso metodo delle flussioni; ma qui Newton non diede di esso nessuna descrizione, benchè avesse aggiunto alcuni esempî del suo uso ed un elenco di formule, che erano immediatamente integrabili. Il primo esempio riguarda la quadratura della curva, rappresentata dall'equazione

$$y = ax^m\ (b + cx^n)^p.$$

Leibniz in risposta spiegò il suo metodo per determinare le tangenti alle curve « non per mezzo delle flussioni delle linee, ma colle differenze de' numeri », ed introdusse la sua notazione di dx e dy per le differenze infinitesime fra le coordinate di due punti consecutivi di una curva. Diede anche una soluzione del problema di trovare una curva, la cui sotto-tangente sia costante, e dimostrò che l'equazione differenziale, cui dava luogo, si poteva integrare.

210. Nel 1679 Hooke, a richiesta della Società Reale, scrisse a Newton esprimendo la speranza, che avrebbe fatto ulteriori co-

Digitized by Google

municazioni alla Società, e nel corso della lettera menzionò le ricerche geodetiche di Picard, in cui era adoperato un valore sostanzialmente esatto per il raggio della Terra. Ciò condusse Newton a ripetere coi dati di Picard i suoi calcoli del 1666 sull'orbita lunare, e così verificò la propria ipotesi che la gravità si estendeva fino alla Luna e variava inversamente al quadrato della distanza. Poi procedè allo studio della teoria generale del moto sotto una forza centrifuga e dimostrò: 1° L'eguale descrizione delle aree. 2° Se un'elisse era descritta attorno ad un foco da un punto sotto una forza centrifuga, la legge era quella dell'inversa del quadrato della distanza. 3° Ed inversamente, che l'orbita descritta da un punto sotto l'influenza di una tal forza, era una conica. Seguendo l'abitudine di non pubblicare nulla, che non l'avesse prima condotto ad una controversia scientifica, trascrisse questi risultati unicamente nei suoi libri di note, e solo in seguito ad una questione specifica, indirizzata a lui cinque anni dopo, si decise alla loro pubblicazione.

211. L'*Arithmetica universalis* che tratta dell'Algebra, della teoria delle equazioni e di svariati problemi, contiene la materia delle lezioni che diede Newton dal 1673 al 1683. In essa introdusse l'uso degli indici letterali, fece vedere che l'equazione, le cui radici sono le soluzioni di un dato problema, avrà tante radici quanti sono i differenti casi possibili; e considerò il caso che può verificarsi che l'equazione a cui conduce un problema possa ammettere radici, che non soddisfino la questione proposta; estese la regola de' segni di Descartes per assegnare il limite del numero delle radici immaginarie; diede la regola per trovare un limite superiore delle radici positive di un'equazione numerica e per determinare i valori approssimati delle radici numeriche. Enunciò pure il teorema, noto col suo nome, per trovare la somma delle stesse potenze delle radici di un'equazione, gettando così la base della teoria delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione.

212. Nell'agosto del 1684 Halley si recò a Cambridge per chiedere a Newton quale sarebbe l'orbita di un pianeta, se la legge di attrazione fosse quella dell'inverso del quadrato della distanza, come si supponeva comunemente verificarsi con una certa

Digitized by Google

approssimazione. Newton asserì subito che era un'elisse, e promise di scrivere e pubblicare di nuovo la dimostrazione di ciò che aveva trovato nel 1679. Tutto ciò fu pubblicato nel novembre 1684; ed Halley subito riconobbe la importanza della comunicazione. Di nuovo si recò a Cambridge ed indusse Newton a riprendere a trattare l'intiero problema della gravitazione ed a pubblicarne i risultati. Pare che Newton avesse da lungo tempo ritenuto, che qualunque molecola attrae ogni altra molecola e sospettato che l'attrazione varia direttamente come il prodotto delle loro masse ed inversamente come il quadrato della distanza fra loro. Ma egli è certo che allora Newton non conosceva che cosa fosse l'attrazione di una massa sferica su qualunque punto esterno, e probabilmente non pensò che una molecola era attratta dalla Terra, come se essa fosse condensata in un punto nel suo centro. Quindi potrebbe darsi che i suoi risultati del 1679 egli li considerasse solo come approssimativamente veri, se applicati al sistema solare. Talchè la sua Analisi matematica dimostrò che il Sole ed i pianeti, riguardati come sferici, esercitavano la loro attrazione, come se le loro masse fossero raccolte nei loro centri; così i suoi primi risultati furon pel sistema solare assolutamente veri, all'infuori soltanto di una correzione dovuta al lieve scostamento dalla forma perfettamente sferica del Sole, della Terra e dei pianeti.

Fu ora Newton in grado di applicare l'Analisi matematica con assoluta precisione agli attuali problemi astronomici.

213. Il primo libro dei *Principia* (1) fu compiuto prima della state del 1685; esso è dedicato allo studio del moto di molecole o corpi nello spazio libero od in orbite conosciute o sotto l'azione di forze note o sotto la mutua attrazione. In esso Newton svolse la legge di attrazione « Che ogni punto materiale nell'universo attrae ogni altra molecola con una forza, che varia direttamente come il prodotto delle loro masse ed inversamente come il qua-

(1) Tutte le scoperte di Newton furono raccolte nella celebre opera « Philosofiae naturalis Principia mathematica », cioè: I principii matematici di filosofia naturale », che stupì il mondo e fu giudicata da Lagrange « La plus haute production de l'ésprit humain ».

Digitized by Google

drato della distanza fra loro »; quindi ne consegue la legge di attrazione per i corpi sferici di densità costante. Il libro è preceduto da un'introduzione sulla scienza della Dinamica. Il secondo libro dei *Principia* fu compiuto nel 1686; questo libro tratta del moto in un mezzo resistente. In esso fu creata la teoria della idrodinamica, che venne applicata ai fenomeni delle onde, delle maree e dell'acustica, e terminò colla dimostrazione che la teoria cartesiana dei vortici era in contraddizione tanto coi fatti noti, quanto colle leggi del moto.

Nel terzo libro i teoremi del primo sono applicati ai principali fenomeni del sistema solare e vi sono determinate le masse e le distanze dei pianeti, e, qualora esistano dati sufficienti, dei loro satelliti; e vi sono esposte particolareggiatamente ed appieno, come era allora possibile, specialmente il moto della Luna, le diverse ineguaglianze terrestri e la teoria delle maree. Newton vi studiò pure la teoria delle comete, vi dimostrò che esse appartenevano al sistema solare, e ne illustrò i risultati col considerare certe comete speciali. L'intiera opera fu pubblicata nel 1687.

214. Le dimostrazioni sono intieramente geometriche; ma sono inutilmente rese difficili dalla loro concisione e dalla mancanza di ogni nesso col metodo con cui sono ottenute. La ragione, onde gli argomenti furono presentati in una forma geometrica, va ricercata nel fatto, che ancora non si conosceva il calcolo infinitesimale; e Newton l'aveva adoperato per dimostrare i risultati, che per sè stessi erano opposti alla filosofia allora prevalente, e la controversia circa la verità dei suoi risultati sarebbe stata inceppata da una disputa riguardante la validità dei metodi usati nello stabilirli.

215. Ora diremo brevemente della carriera di Newton. Nel 1696 fu nominato governatore delle miniere; poi si recò a Londra; e nel 1699 fu nominato Direttore della zecca. Il suo Trattato sull'Ottica, il suo saggio sulla Geometria analitica, applicata alle curve algebriche, nel quale vennero stabilite molte delle proprietà fondamentali degli assintoti, dei punti multipli e de' nodi isolati delle curve, e la sua esposizione del calcolo delle flussioni furono pubblicati nel 1704, ed altre opere di poi.

Digitized by Google

216. Il calcolo delle flussioni è una forma speciale del calcolo infinitesimale, espresso con una certa notazione, precisamente come il calcolo differenziale è un altra forma dello stesso calcolo, espresso con una notazione diversa; ma per più ragioni il Calcolo delle flussioni è meno conveniente di quello differenziale. L'ultima notazione fu inventata da Leibniz nel 1675 e pubblicata nel 1684, circa nove anni prima della pubblicazione del primo saggio pubblicato delle flussioni di Newton. Ma la questione se l'idea del calcolo espresso in quella notazione Leibniz l'avesse ottenuta da Newton, o se esso fosse stato inventato indipendentemente, diede origine ad una controversia lunga ed aspra. La quistione è difficile a risolversi; gl'Inglesi naturalmente opinano che Leibniz attingesse l'idea del Calcolo differenziale da un manoscritto di Newton, che egli vide nel 1675; ma io ne dubito molto; comunque sia egli è un fatto, che il calcolo differenziale del Leibniz nella notazione è essenzialmente diverso dal Calcolo delle flussioni di Newton ed è migliore: ciò basta per me a provare, che Leibniz, quand'anche avesse veduto prima il lavoro di Newton, nulla ha tolto da esso; imperocchè in quanto alla prima idea del calcolo si potrebbe allora osservare che tanto Newton, quanto Leibniz l'abbiano tolta dalle opere dei loro predessori; onde l'invenzione del Calcolo infinitesimale si deve attribuire tanto a Newton, quanto a Leibniz.

217. Newton era di persona basso, ma ben piantato, con la mascella inferiore quadra, occhi neri, fronte larga, e fattezze alquanto sottili. I suoi capelli divennero grigi prima di trenta anni, e rimasero folti e bianchi come argento sino alla sua morte; nel vestire era negletto. Egli spesso era così assorto ne' suoi propri pensieri come se altro mai; però era in compagnia piacevolissimo. Era schietto, scrupolosamente onesto e religioso di molto, avendo, come disse Bishop Burnet, « l'anima candidissima » se altra mai.

218. Il nome di Newton nella Storia delle Matematiche è forse il più grande; e senza dubbio vi è da maravigliarsi in pensando a ciò, che egli compì. Newton con modestia rara attribuiva gran

Digitized by Google

parte delle sue scoperte, più che al suo genio, all'ammirabile lavoro fatto dai suoi predecessori; ed asserì che se egli aveva veduto un po' più in là degli altri uomini, egli era solo perchè si era messo sulle spalle dei giganti. Egli riassumeva la stima verso sè stesso così: « Non so che cosa io possa sembrare al mondo; ma a me stesso pare di essere stato solo come il fanciullo, che scherza sulla riva del mare, e divertendosi trova di tanto in tanto qualche sassolino più levigato degli altri o qualche conchiglia più bella delle ordinarie, mentre il grande oceano della verità tiene tutto nascosto davanti a me ». Newton era morbosamente sensibile quando era coinvolto in qualche discussione. Si crede, che, all'infuori delle sue Memorie sull'Ottica, tutte le altre sue opere furono pubblicate solamente sotto la pressione dei suoi amici e contro i suoi desideri.

219. ***Introduzione del calcolo nel Continente.*** — L'Analisi moderna non è derivata direttamente da Newton, ma piuttosto dalle opere di Leibniz e dei Bernoulli, di cui ora discorreremo brevemente.

220. ***Leibniz,*** *1646-1716*. — Leibniz nacque a Lipsia; perdette il padre, quando egli aveva appena sei anni; e l'insegnamento della scuola, che allora frequentava per lui era insufficiente; ma colla sua diligenza superò ogni difficoltà; a dodici anni aveva già imparato da sè stesso a leggere facilmente il latino e già aveva incominciato a studiare il greco; e prima che toccasse i venti anni si era già impadronito degli ordinari testi di Matematica, di Filosofia, di Teologia e di Legge. A Lipsia rifiutò il grado di dottore in giurisprudenza da quelli, che avevano invidia della sua giovinezza e della sua dottrina; andò poi a Norimberga; ed un saggio che egli vi scrisse sullo studio della legge gli fruttò un posto nella diplomazia. La violenta cattura di diverse piccole città dell'Alsazia nel 1670 suscitò un grande allarme nella Germania intorno ai progetti di Luigi XIV; allora Leibniz stese un piano, col quale si offriva la cooperazione tedesca, se alla Francia piacesse d'impossessarsi dell'Egitto coll'unico scopo di farne la base di offesa contro i possessi asiatici dell'Olanda, a patto però che la Francia lasciasse indisturbata la Germania. È curioso

Digitized by Google

notare che questo piano ha una somiglianza con quello analogo, onde Napoleone I proponeva di attaccare l'Inghilterra. Nel 1672 Leibniz si recò a Parigi dietro invito del governo francese a spiegare i particolari del suo piano; ma non se ne concluse nulla.

221. A Parigi egli conobbe Hygens; ed i discorsi di questo lo spinsero allo studio della Geometria e ad incominciare le ricerche maetmatiche. Nel 1674 entrò al servizio della Casa di Brunswick; nel 1676 visitò Londra; poi andò ad Hannover, ove occupò fino alla sua morte il ben rimunerato posto di dirèttore della biblioteca ducale. Gli ultimi anni della sua vita, dal 1707 al 1716, furono amareggiati dalla controversia sulla scoperta del Calcolo differenziale, che alcuni credevano l'avesse fatta indipendentemente dalle ricerche precedenti di Newton, altri che avesse presa l'idea fondamentale da Newton o semplicemente inventata per essa un'altra notazione; più sopra abbiamo espresso su ciò la nostra opinione.

222. Leibniz era assai amante del danaro e degli onori personali; non fu molto scrupoloso, del resto come qualunque altro diplomatico di quell'epoca; ma aveva modi affascinanti, e quelli che lo potevano avvicinare ne rimanevano avvinti e sinceramente affezionati. La sua fama come Matematico fu certamente accresciuta dalla eminente posizione che egli occupava in diplomazia, in filosofia e nella letteratura; e la grande stima acquistata fu anche accresciuta dalla influenza, che egli esercitava nella direzione dell'*Acta Eruditorum*, che era allora il solo Giornale scientifico di qualche importanza.

223. Le sole Memorie di Matematica di un certo valore, che egli pubblicò, riguardano il Calcolo differenziale. La prima di queste fu pubblicata nel 1684, in cui enunciò il metodo generale per trovare i massimi ed i minimi e per condurre le tangenti alle curve. Studiò pure il problema inverso a quello di trovare la curva, la cui sotto-tangente è costante. La notazione è la stessa di quella che ora conosciamo; furono determinati i coefficienti differenziali di x^n, dei prodotti e dei quozienti. Nel 1686 e nel 1694 scrisse parecchie Memorie sui principii del nuovo Calcolo.

Digitized by Google

In queste Memorie la esposizione tanto degli argomenti, quanto dei metodi del Calcolo infinitesimale è qualche cosa di oscuro; e certamente il tentativo, che egli fece di porli sopra una base metafisica, non giovò alla chiarezza; però la sua notazione è senza dubbio superiore a quella di Newton; ed il fatto, che tutti i risultati della Matematica moderna sono espressi nel linguaggio inventato da Leibniz, è la miglior prova dell'eccellenza della sua opera ed il miglior monumento di essa.

Inoltre Leibniz scrisse parecchie Memorie su questioni riguardanti le curve ed i problemi della Meccanica, le quali attestano la sua abilità nel maneggiare l'Analisi; ma quando abbandonò i suoi simboli ed i tentativi per interpretare i suoi risultati cadde spesso in errore. Ad onta di ciò la sua fama rimane su basi sicure, poichè dalla apologia, che egli fece del Calcolo differenziale, ne risulta chiaramente, che il suo nome è intimamente legato ad uno dei principali strumenti di Analisi, e precisamente come quello di Descartes, un altro filosofo, all'Analisi geometrica.

224. ***I Bernoulli.*** — Leibnitz fu uno dei tanti Matematici del continente, i quali mediante le loro Memorie, pubblicate nell'*Acta Eruditorum*, resero familiare l'uso del Calcolo differenziale agli altri Matematici di quell'epoca. Fra questi i più importanti furono i fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli. Essi non solo presero sempre parte principalissima alle questioni di Matematica, studiate in quei tempi; ma durante la prima metà del secolo XVIII un gran numero di Matematici di valore del continente crebbe sotto l'influenza diretta od indiretta dell'uno o dell'altro o di entrambi. Il primo de' Bernoulli, che si segnalò nelle Matematiche, fu Giacomo.

225. ***Giacomo Bernoulli,*** *1654-1705.* — Giacomo Bernoulli nacque a Basilea nel 1654, fu nominato alla cattedra di Matematica di quella università; e la occupò sino alla morte avvenuta nel 1705. Egli fu uno de' primi a mettere in evidenza la potenza del Calcolo infinitesimale come un istrumento di Analisi, applicandolo a parecchi problemi; ma da sè non inventò alcun nuovo procedimento. Le sue scoperte più importanti sono: Una solu-

Digitized by Google

zione del problema di trovare una curva isocroma; una dimostrazione, che la costruzione della catenaria data da Leibniz era esatta; un'estensione di questa alle funi di densità variabile e sotto una forza centrale; la determinazione della forma presa da una verga (curva elastica) fissa ad un'estremità e sottoposta ad una data forza all'altra estremità; inoltre di una lamina rettangolare flessibile (lintearia) con due lati fissi orizzontalmente e piena di un liquido pesante; e da ultimo di una vela gonfiata dal vento (velaria). Nel 1696 offrì una ricompensa per la risoluzione generale del problema degl'isoperimetri, ossia per la ricerca delle figure di una data specie e di un dato perimetro che comprendono un'area massima: la soluzione data da lui e pubblicata nel 1701, è sostanzialmente esatta. Nella sua *Ars Conjectandi* pubblicata nel 1701 stabilì i principî fondamentali del Calcolo delle probabilità; e durante le sue ricerche definì i numeri, noti col suo nome e ne spiegò il loro uso.

226. ***Giovanni Bernoulli,*** *1667-1748.* — Giovanni Bernoulli, fratello di Giacomo, pur'egli nacque a Basilea; occupò successivamente le cattedre di Matematica di Groningen e di Basilea, ove successe a suo fratello. Egli si comportava ingiustamente con tutti coloro, che non riconoscevano i suoi meriti secondo il suo desiderio; come esempio del suo carattere può ricordarsi, che egli tentò di mettere al posto di una inesatta sua soluzione del problema delle curve isoperimetriche un'altra soluzione rubata a suo fratello Giacomo; e ad un tempo cacciava di casa suo figlio Daniele, perchè aveva ottenuto dall'Accademia di Francia un premio, colla speranza di averlo lui stesso. Dopo la morte di Leibniz e dell'Hospital egli si arrogò il merito di alcune loro scoperte; ma ora le sue pretensioni sono state riconosciute per false. Tuttavia fu ai suoi tempi un ottimo ed anche un fortunato docente; imperocchè aveva l'abilità di ispirare ai suoi discepoli uno zelo appassionato per gli studî matematici, come lo aveva lui stesso; e l'adozione nel continente del Calcolo differenziale, invece della notazione delle flussioni, è dovuta in gran parte alla sua influenza.

Digitized by Google

227. Le principali scoperte di Giovanni Bernoulli sono: Il calcolo esponenziale; la trattazione della trigometria come un ramo di Analisi; le condizioni perchè una linea sia geodetica; la determinazione delle traiettorie ortogonali; la soluzione della brachistocrona; la spiegazione, che un raggio di luce descrive una traiettoria tale, che $\Sigma \mu ds$ è un minimo; l'enunciato del principio del lavoro virtuale. Si crede che egli fosse il primo a denotare l'accelarazione prodotta dalla gravità col segno algebrico g, ed arrivò così alla formula $v^2 = 2gh$. La notazione φx per indicare una funzione di x fu da lui introdotta nella Matematica nel 1718, sostituendola a quelle di X o ζ, proposte da lui nel 1698; ma l'uso generale de' simboli, come f, F, φ, ψ.... a rappresentare le funzioni pare sia dovuto ad Eulero e Lagrange.

228. ***Lo sviluppo dell'Analisi nel Continente.*** — Ponendo per un momento da banda i Matematici inglesi della prima metà del XVIII secolo, abbiamo subito dopo un numero di Matematici del Continente, che appena escono dalla mediocrità; però i loro scritti servirono a propagare i metodi ed il linguaggio della Geometria analitica e del Calcolo differenziale. Fra essi i più eminenti furono l'Hospital 1661-1704; Varignon 1654-1722; Nicole 1683-1759 e De-Gua 1713-1785; Cramer 1704-1752; Riccati da Venezia 1676-1754; Maria Gaetana Agnesi 1718-1799 da Milano, che pubblicò nel 1748 le sue *Instituzioni Analitiche*, che sono un commentario dell'*Analysis Infinitorum* di Eulero; la curva piana, la cui equazione è $\left(\frac{y}{c}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x}$, dicesi curva di Agnesi o verziera; essa fu nominata insegnante emerita dell'Università di Bologna.

La prima metà del secolo XVIII fu rimarchevole per gli scritti di Clairaut, di D'Alembert, di Daniele Bernoulli e di Eulero, di cui ora parleremo.

229. ***Clairaut,*** *1713-1765.* — Clairaut nacque a Parigi; all'età di diciotto anni scrisse intorno alle curve gobbe, e diede una dimostrazione della proposizione, già rilevata da Newton che «*Tutte le cubiche erano proiezioni di una delle cinque parabole*». Dieci anni dopo fece parte di una delle due spedizioni scientifiche

Digitized by Google

per la misura della lunghezza del grado del meridiano terrestre; al ritorno pubblicò la sua: « *Thèorie de la figure de la terre* ». Essa è fondata su una Memoria di Maclaurin, ove era stato dimostrato « *Che una massa di fluido omogeneo messa in rotazione intorno ad un asse, che passa pel suo baricentro, prende sotto l'azione mutua delle sue molecole la forma di uno sferoide* ». Il lavoro di Clairaut tratta degli sferoidi eterogenei e contiene la dimostrazione della sua formula per l'accelerazione prodotta dalla gravità in un luogo di latitudine φ, cioè:

$$g = \mathrm{G}\left[1 + \left(\frac{5}{2}\, m - \varepsilon\right) \mathrm{sen}^2\varphi\right],$$

ove G è il valore della gravità equatoriale, m il rapporto della forza centrifuga alla gravità all'equatore, e ε l'eccentricità di una sezione meridiana della terra. Nel 1849 Stokes dimostrò, che lo stesso risultato era vero qualunque fosse la costituzione interna o densità della Terra, considerando la Terra come uno sferoide di equilibrio di piccola eccentricità.

230. Colpito dalla potenza della Geometria, come scorgesi nelle opere di Newton e di Maclaurin, Clairaut abbandonò l'Analisi, e mise in una forma geometrica la sua opera successiva, che fu pubblicata nel 1752. Questa contiene la spegazione del moto degli apsidi, che in addietro aveva non poco impacciato gli Astronomi; e Clairaut dapprima aveva considerato quasi inespicabile, tanto da essere sul punto da pubblicare una nuova ipotesi, come per la legge di attrazione, allorchè gli occorse di spingere le approssimazioni fino al terzo ordine, così trovò che il risultato era in accordo colle osservazioni.

231. La sua crescente popolarità nella società lo distolse dalla sua opera scientifica. « Engagé, dice Bossut, à des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé, enfin la vie à l'âge de cinquantedeux ans ».

232. ***D'Alembert,*** *1717-1783.*—Giovanni-le-Rond D'Alembert nacque a Parigi nel 1717; essendo stato abbandonato da sua

Digitized by Google

madre sui gradini della piccola chiesa di San Giovanni-le-Rond. che allora stava sotto il gran portico di Nôtre-Dame, fu raccolto dal Commissario parrocchiale, che seguendo in tali casi la pratica ordinaria, gli diede il nome di Giovanni-le-Rond. Il Commissario lo collocò in via Michel-le-Contes, presso la moglie del vetraio Rouseau, dalla quale ricevette una buona e compiuta educazione.

233. Quasi tutte le sue opere di Matematica furon pubblicate negli anni che vanno dal 1743 al 1754. La prima di esse fu la sua opera sulla Dinamica, pubblicata nel 1743, nella quale enunciò il principio conosciuto col suo nome, cioè che « *Le forze interne d'inerzia, cioè le forze che si oppongono all'accelerazione, sono eguali ed opposte alle forze, che producono l'accelerazione* ». Ciò si può dedurre dal 2° discorso di Newton sulla sua terza legge del moto; ma prima di lui nessuno n'aveva compiutamente tratte le conseguenze. L'applicazione di questo principio mette in grado di ottenere le equazioni differenziali del moto di qualunque sistema rigido. Nell'anno successivo D'Alembert applicò il suo principio ai fenomeni dell'Idromeccanica. Alcuni anni di poi diede la soluzione di un'equazione differenziale a derivate parziali di 2° ordine. Le altre contribuzioni di D'Alembert alle Matematiche riguardano l'Astrofisica; in particolare si riferiscono alla precessione degli equinozî e sulle variazioni nella obliquità dell'ecclittica.

234. Nell'ultimo periodo della sua vita egli fu principalmente occupato nella grande Enciclopedia francese; per essa scrisse l'introduzione e numerosi Articoli filosofici e matematici; i migliori sono quelli sulla Geometria e sulle probabilità. Il suo stile è disinvolto, ma non elegante; esso rispecchia fedelmente il suo carattere, che era onesto, franco, ardito. Egli difendeva la critica severa che aveva fatto di qualche opera mediocre colla osservazione: « J'aime mieux être incivil qu'ennuyé »; e per la grande antipatia, che aveva per gli adulatori e gl'importuni, non è a stupirsi se durante la sua vita ebbe più nemici, che amici. È a suo merito, se rifiutò di abbandonare la madre adottiva, con cui continuò a vivere fino alla morte di lei, che avvenne nel 1757.

Digitized by Google

Non può dirsi che essa avesse gran simpatia pe' suoi successi, poichè all'altezza della sua fama essa rispondeva lagnandosi con lui per lo sciupìo che faceva del suo ingegno con simile lavoro. « Vous ne serez jamais qu' un philosophe » diceva essa; « et qu' est-ce qu' un philosophe? C'est un fou, qui se tourmente pendant sa vie, pour qu' on parle de lui lorsqu' il n' y sera plus ».

235. ***Daniele Bernoulli,*** *1700-1782.* — Daniele Bernoulli fu contemporaneo ed amico intimo di Eulero, di cui parleremo fra poco. Andò a Pietroburgo nel 1724 come professore di Matematica; ma la ruvidezza della vita sociale gli era fastidiosa; e certo non fu molto dispiacente, quando nel 1733 una malattia temporanea gli permise di allegarla come scusa per andarsene; e ritornò quindi a Basilea, ove successivamente occupò le cattedre di Medicina, di Metafisica e di Filosofia naturale. Suo fratello Giovanni (1710-1790) andò in Russia dietro l'invito della Imperatrice nel 1725.

236. Il suo primo lavoro di Matematica, pubblicato nel 1724, contiene una teoria delle oscillazioni dei corpi rigidi, ed una soluzione dell'equazione differenziale, proposta dal Riccati. Due anni dopo rilevò l'utilità di risolvere un moto composto in moti separati di traslazione e di rotazione. Il suo principal lavoro è la sua *Hydrodynamique*, pubblicata nel 1738; essa ha una certa somiglianza coll'opera di Lagrange sulla Meccanica, essendo ordinata in modo, che tutti i risultati sono conseguenze di un unico principio, cioè in questo caso della conservazione dell'energia. Questo fu seguito da una Memoria sulla teoria delle maree, cui, unitamente alle Memorie di Eulero e Maclaurin, fu assegnato un premio dall'Accademia francese. Queste tre Memorie contengono quanto era stato fatto su questo argomento fra la pubblicazione dei *Principia* di Newton e le ricerche di Laplace. Bernoulli scrisse anche un gran numero di Note su diverse questioni di Meccanica, specialmente sui problemi riguardanti le corde vibranti e le soluzioni di essi date da Taylor e da D'Alembert. Egli fu il primo Matematico, che tentò di formulare una teoria cinetica dei gas, e l'applicò subito per ispiegare la legge, che porta i nomi di Boyle e di Mariotte.

Digitized by Google

237. ***I Matematici inglesi del diciottesimo secolo.*** — Era ben naturale che un Matematico inglese avesse innanzi tutto adottato nel calcolo infinitesimale la notazione di Newton piuttosto che quella di Leibniz. L'adesione de' Matematici inglesi alla notazione flussionale fu principalmente dovuta al giusto risentimento, provocato dall'azione di Leibniz e di Giovanni Bernoulli; ma l'effetto fu assai dannoso, perchè essa tendeva ad isolarli dai loro contemporanei del Continente. I principali componenti la scuola inglese furono: Halley 1656-1742; Taylor 1685-1731; Cotes 1682-1716, che fece il primo tentativo per formare una teoria degli errori; Demoivre 1667-1754, che creò quella parte della Trigonometria, trattata colle quantità immaginarie, e scrisse sulle serie ricorrenti e sulle frazioni parziali; Maclaurin 1698-1746; e Tommaso Simpson 1710-1761; Roberto Simson 1687-1768, che si sforzò a far rivivere la Geometria dei Greci; scrisse un Trattato sulle coniche; ed a lui è dovuto il teorema « I piedi delle perpendicolari, condotte da un punto qualunque del circuncerchio di un triangolo qualsiasi sui suoi lati, sono collineari »; questa retta dicesi retta di Simson od anche di Wallace; Stewart 1717-1785, che pubblicò i suoi *General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*, e le sue *Propositiones geometricae more veterum demonstratae;* in queste opere si trovano alcuni teoremi sulle trasversali dovuti all'italiano Ceva. Ma qui non parleremo che delle ricerche di Taylor e di Maclaurin.

238. **Taylor**, *1685-1731.* — Brook Taylor studiò a Cambridge; fu fra i più entusiasti ammiratori di Newton. La sua prima opera, pubblicata nel 1715, contiene una dimostrazione del ben noto teorema:

$$f(x+h) = \frac{1}{\underline{|0}} f(x) + \frac{1}{\underline{|1}} h f'(x) + $$
$$+ \frac{1}{\underline{|2}} h^2 f''(x) + \frac{1}{\underline{|3}} h^3 f'''(x) + \ldots,$$

mediante il quale una funzione ad una sola variabile può essere sviluppata in potenze di essa. Fra le altre applicazioni del calcolo, diede la teoria delle vibrazioni trasversali delle corde; de-

Digitized by Google

terminò l'equazione differenziale della traiettoria di una raggio di luce, allorchè attraversa un mezzo eterogeneo; e supponendo, che la densità dell'aria dipenda dalla sua distanza dalla superficie della Terra, ottenne mediante le quadrature la forma approssimata della curva; studiò pure la forma della catenaria e la determinazione dei centri di oscillazione e di percussione. Il suo Trattato sulla prospettiva, pubblicato nel 1713, contiene il primo enunciato generale del principio dei punti di fuga (1).

239. ***Maclaurin,*** *1698-1746*. — Colin-Maclaurin nacque a Kilmodan nella contea di Argylle; morto a York nel 1746. Occupò successivamente le cattedre di Matematica ad Aberdeen e ad Edinburgo. Nel 1745 prese attiva parte contro l'avanzarsi del Giovine Pretendente; all'avvicinarsi degli Hinglanders (montanari) egli si rifugiò ad York; però l'esporsi nelle trincee ad Edinburgo e le privazioni sofferte nella fuga gli riuscirono fatali.

240. La sua *Geometria organica*, 1719, è un'estensione di un teorema dato da Newton. Newton aveva dimostrato, che se due angoli determinati da rette ruotano intorno ai loro rispettivi vertici in modo, che il punto d'intersezione di due di queste rette si muove lungo una retta, l'altro punto d'intersezione descriverà una conica; e, se il primo punto si muove lungo una conica, il secondo descriverà una quartica. Maclaurin diede uno studio analitico del teorema generale, e dimostrò come si poteva con questo metodo tracciare praticamente diverse curve. Quest'opera contiene uno studio particolareggiato sulle curve e sulle loro pedali. Nell'anno seguente Maclaurin pubblicò un supplemento sui diametri, sugli assintoti e su diversi teoremi geometrici.

(1) Veramente il principio dei punti di fuga fu per la prima volta enunciato nella sua Prospettiva da Guidobaldo del Monte (1545-1607). Vedi appendice I^a^.

Digitized by Google

241. Il suo *Trattato delle Flussioni*, pubblicato nel 1742, contiene una esposizione sistematica di questo metodo di calcolo. In esso diede una dimostrazione del teorema che:

$$f(x) = \frac{1}{\underline{|0}} f(0) + \frac{1}{\underline{|1}} x f'(0) + \\ + \frac{1}{\underline{|2}} x^2 f''(0) + \frac{1}{\underline{|3}} x^3 f'''(0) + \ldots\ldots$$

Il risultato era stato dato precedentemente nel 1730 da Giovanni Stirling, e si vede che si può subito dedurre dal teorema di Taylor, in cui sono ammissibilmente fondate le dimostrazioni di Stirling e di Maclaurin. Maclaurin enunciò anche l'importante teorema che se $\varphi(x)$ è positiva e decresce secondo che x cresce, da a all' ∞, allora la serie:

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots\ldots$$

è convergente o divergente secondo che $\int_a^\infty \varphi(x).\, dx$ è finito od infinito.

Diede pure la teoria esatta dei massimi e dei minimi e le regole per distinguere e trovare i punti multipli.

242. Tuttavia questo Trattato ha speciale importanza per le soluzioni, che contiene di numerosi problemi di Geometria, di Statica, della teoria delle attrazioni e di Astronomia. Per risolvere questi problemi egli ricorse ai metodi classici; e sì fecondi e potenti sembravano, quando erano impiegati da lui, che Clairaut, come si disse, dopo aver letto la sua opera, abbandonò l'Analisi, e trattò il problema della forma della Terra nuovamente colla Geometria pura. In epoca più recente questa parte del libro di Maclaurin fu definita da Lagrange come il « chef d'oeuvre de géometrie qu'on peut comparer à tout ce qu' Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux ». Maclaurin vi determinò l'attrazione di un elissoide omogeneo su di un punto interno, e diede alcuni teoremi sulla sua attrazione su un punto esterno; ciò facendo introdusse il concetto di superficie di livello, cioè di quelle superficie, che in ogni loro punto l'attrazione ri-

Digitized by Google

sultante è perpendicolare ad esse. Non furono fatti ulteriori progressi nella teoria dell'attrazione, finchè nel 1773 Lagrange non introdusse l'idea del potenziale. Maclaurin dimostrò pure che uno sferoide era una forma possibile di equilibrio di una massa di liquido omogeneo rotante intorno ad un asse, che passi pel suo baricentro; finalmente studiò la teoria delle maree.

243. ***Decadimento della scuola inglese.*** — Nei primi anni del secolo XVIII la scuola inglese apparve vigorosa e feconda, ma rapidamente incominciò a decadere; e dopo la morte di Maclaurin e di Simpson nessun Matematico inglese comparve, che possa paragonarsi ai Matematici del Continente della seconda metà del secolo XVIII. Questo fatto si spiega in parte per l'isolamento della scuola, in parte per la sua tendenza di appoggiarsi troppo esclusivamente sui metodi geometrici e su quello delle flussioni. Tuttavia la scienza pratica fu coltivata con maggior successo; ma finchè non vennero in voga i nuovi metodi analitici, cioè fino circa al 1820, la scuola inglese di Matematica non si rialzò.

244. ***Sviluppo della scuola continentale.*** — Nel Continente sotto l'influenza di Giovanni Bernoulli sino dalla metà del secolo XVIII il Calcolo era divenuto uno strumento di grande potenza analitica, espresso in una notazione ammirabile; e per le applicazioni pratiche si sa che una buona notazione è di utilità grandissima.

La Meccanica tuttavia era rimasta in gran parte nella condizione, in cui l'aveva lasciata Newton; finchè d'Alembert, adoprando il calcolo differenziale, cercò di estenderla alquanto. La gravitazione universale, come fu enunciata *nei Principia*, era accettata come un fatto stabilito; ma i metodi geometrici adoperati per dimostrarla erano difficili a seguirsi o ad usarsi in problemi analoghi; Maclaurin, Simpson e Clairaut si possono riguardare come gli ultimi Matematici di fama che impiegarono questi metodi. I principali Matematici dell'epoca, di cui ora dovremo occuparci, sono Eulero, Lagrange, Laplace e Legendre. Brevemente possiam dire che Eulero estese, riassunse e completò l'opera de' suoi predecessori; mentre Lagrange, con un genio

Digitized by Google

quasi insuperabile, sviluppò il Calcolo infinitesimale e la Meccanica teorica, e li ridusse alle forme odierne. Allo stesso tempo Laplace fece alcune aggiunte al Calcolo infinitesimale e l'applicò alla teoria della gravitazione universale; creò pure il Calcolo delle probabilità. Legendre inventò l'Analisi armonica sferica, richiamò l'attenzione sugl'Integrali ellittici ed estese le teoria de' numeri.

245. ***Eulero***, *1707-1783*. — Leonardo Eulero era figlio di un ministro luterano di Basilea; studiò nel suo paese natìo sotto Giovanni Bernoulli. I fratelli Bernoulli, Daniele e Nicola, gli procurarono a Pietroburgo un posto, che scambiò colla cattedra di Matematica, quando fu lasciata vacante nel 1733 da Daniele Bernoulli. Ma il rigore di quel clima danneggiò di molto la sua vista, tanto che nel 1735 perdè completamente l'uso di un occhio. Nel 1741 si recò a Berlino in seguito all'invito o meglio dietro il comando di Federico il Grande; rimase a Berlino fino al 1776, nel quale anno fece ritorno in Russia; a Berlino gli successe Lagrange. Dopo due o tre anni del suo ritorno a Pietroburgo divenne cieco; ma ad onta di ciò, e quantunque la sua casa insieme a molte delle sue Memorie si bruciasse nel 1771, egli continuò i suoi lavori e rifece molte delle sue Memorie principali e dei suoi libri.

246. L'opera di Eulero si può riassumere dicendo, che egli estese grandemente i metodi di analisi, e rivide quasi tutti i rami delle matematiche pure allora conosciuti, arricchendoli di particolari, aggiungendo dimostrazioni, ed ordinando il tutto in una forma razionale. Tale lavoro fu veramente importante, e davvero è una gran fortuna per la scienza, quando cade in mani sì competenti come quelle di Eulero. Oltre le sue classiche ricerche sull'Algebra, determinata ed indeterminata, sulla Trigonometria, sulla Geometria analitica e sul Calcolo, compreso il primo uso di quello delle Variazioni, egli scrisse sulla Meccanica, sulla Fisica e sull'Astronomia.

Ecco l'elenco delle opere pubblicate da Eulero: nel 1748 la sua *Introductio* in *Analysis Infinitorum;* nel 1755 le *Institutiones Calculi Differentialis;* i tre volumi dal 1768 al 1770 delle *Istitu-*

Digitized by Google

tiones Calculi Integralis; nel 1744 il suo *Curvarum Maximi Minimeve Proprietate Gaudentium Inventio Nova ac Facilis;* in due volumi nel 1770 i suoi *Anleitung zur Algebra.* Le più importanti opere d'Astronomia sono: la sua *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum* (1744); la sua *Theoria Motus Lunaris* (1753); la sua *Theoria Motuum Lunae* (1772). In fisica: la *Dioptrica* (1770-71) in tre volumi; *Lettres sur quelques sujets de physique* (1768-1772) in tre volumi, ecc.

247. Naturalmente le splendide opere di Eulero non furono i soli libri di testo, che insegnassero le ricerche originali fatte in quest'epoca. Fra i numerosi Matematici, oltre quelli rammentati sopra, si potrebbe ricordare specialmente Lambert 1728-1777, distinto Matematico prussiano, che per primo dimostrò l'irrazionalità di π. Ma come ci avviciniamo ai tempi moderni, il numero dei Matematici di qualche importanza diviene così grande, che siamo costretti a limitarci a parlare solo di quelli di genio veramente eccezionale; onde incominciamo subito a discorrere delle opere di Lagrange.

248. **Lagrange**, *1736-1813.* — Luigi Lagrange, il più grande Matematico del secolo XVIII, nacque a Torino. Suo padre era Cassiere militare, quindi in buone condizioni sociali; ma prima che il figlio divenisse adulto, perdè gran parte del suo patrimonio in speculazioni sbagliate; e così il giovine Lagrange dovette per formarsi una posizione fare assegnamento sul suo proprio ingegno. Studiò a Torino; ma fino a diciassette anni non dimostrò nessuna inclinazione per la Matematica, cioè finchè non intrapprese da sè lo studio di questa scienza. Il primo frutto di questi studî fu la sua lettera, scritta all'età di diciannove anni, ad Eulero, nella quale egli risolveva il problema degli isoperimetri, che per oltre mezzo secolo era stato oggetto di molti studî. Infatti nella soluzione di questo problema (in cui si cercava di determinare la forma di una funzione in modo, che una formula, in cui essa entrava, avrebbe soddisfatto una certa condizione), egli enunciò i principî del calcolo delle variazioni. Eulero riconobbe subito la generalità del metodo e la sua superiorità su quello usato da lui stesso; e con cortesia rara tenne celata una

Digitized by Google

Memoria, che egli aveva precedentemente scritta, la quale conteneva qualche cosa di consimile, affinchè il giovane Matematico italiano potesse avere il tempo di compiere il suo lavoro e reclamare per sè la indisputata invenzione del nuovo Calcolo.

249. Quest'ultimo lavoro di Lagrange lo pose in prima linea fra i Matematici. Cinque anni di poi egli divenne e rimase senza rivali il primo Matematico allora vivente; ma l'indefesso lavoro degli anni precedenti aveva seriamente scosso la sua salute; ed i dottori dubitavano della sua ragione e della sua vita, se non si decideva a darsi al riposo ed allo spasso. Tuttavia la sua salute temporaneamente si ristabilì; il suo sistema nervoso, sempre agitato, riacquistò la sua tonicità; ma da allora in poi soffrí costantemente di attacchi di profonde malinconie.

250. Nel 1764 lasciò l'Italia per visitar Londra; ma strada facendo si fermò a Parigi, ove fu ricevuto coi più distinti onori, e con vero rammarico lasciò la brillante società parigina per far ritorno alla vita provinciale di Torino; ma il suo ulteriore soggiorno in Piemonte fu breve. Nel 1766 Eulero lasciò Berlino, e Federico il Grande immediatamente scrisse esprimendo il desiderio « del più gran Re di Europa » di avere alla sua Corte « il più grande Matematico d'Europa ». Lagrange accettò l'offerta, e così passò i successivi venti anni in Prussia.

251. Durante gli anni, che passò a Berlino, la sua attività intellettuale fu sorprendente, imperocchè non solo egli scrisse la sua splendida « *Mécanique analytique* », ma presentò alle varie Accademie circa un duegento Memorie. Alcune di esse sono dei veri Trattati, e tutte senza eccezione sono di un alto ordine di eccellenza. Esse contengono la soluzione di molti e difficilissimi problemi sull'Algebra, sulla teoria dei numeri, sulle equazioni differenziali, che egli pose su base scientifica, sulle differenze finite, sulla teoria delle attrazioni, nella quale introdusse fino dal 1773 l'idea del potenziale, e sull'Astronomia.

252. Oltre a queste Memorie egli scrisse il suo gran Trattato della « *Mécanique analytique* », in cui espose la legge delle ve-

Digitized by Google

locità virtuali, e da questo principio fondamentale coll'aiuto del Calcolo delle variazioni dedusse l'intiera Meccanica tanto de' solidi, quanto de' fluidi. Il metodo poi delle coordinate generali, mediante le quali diede le formule generali, da cui si può ottenere qualunque risultanto particolare, è forse il risultato più geniale ed interessante della sua Analisi. Invece di seguire il moto di ciascuna parte individuale di un sistema materiale, come avevano fatto Newton, d'Alembert ed Eulero, egli fece vedere, che se determiniamo la sua configurazione mediante un numero sufficiente di variabili, che è uguale a quello dei gradi d'indipendenza del sistema, allora l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema si possono esprimere in funzione di queste variabili; quindi le equazioni differenziali del moto si possono ottenere con semplici differenziazioni.

253. Federico il Grande nel 1767 morì; e Lagrange, che aveva trovato il clima di Berlino non confacente alla sua salute, di buon grado accettò l'invito di Luigi XVI di recarsi a Parigi. Ricevette inviti consimili dai governi di Spagna e di Napoli. In Francia fu ricevuto degnamente, e furono perciò apprestati speciali appartamenti al Louvre. Ma sulle prime venne assalito da un forte attacco di ipocondria, e perfino la copia stampata della sua *Mécanique analytique*, sulla quale aveva lavorato per ben un quarto di secolo, lasciò intonsa sul suo scrittoio. È curioso l'osservare che i successi della Rivoluzione francese dapprima lo risvegliarono dal suo letargo, poi quasi subito, il modo come essa si svolgeva, gli fece paura. Fu circa la stessa epoca, 1792, che la inesplicabile tristezza della sua vita e la sua eccessiva timidezza mossero a compassione una giovane, che insistette per isposarlo; e fortunatamente divenne una moglie devota, alla quale egli si affezionò vivamente. Benchè il decreto di ottobre, 1793, che ordinava a tutti gli stranieri di lasciar la Francia, particolarmente per la fama che si era acquistato, lo avesse risparmiato, tuttavia egli si accingeva ad emigrare, quando gli fu offerta la presidenza della Commissione della riforma dei pesi e delle misure. Dobbiamo in gran parte a lui la scelta definitiva dell'unità fondamentale di misure e delle altre unità, e la loro divisione decimale. Quantunque Lagrange avesse deciso di abbandonare la

Digitized by Google

Francia, mentre vi era ancor tempo, tuttavia egli non corse mai pericolo alcuno; ed i diversi governi rivoluzionari, e nell'ultimo tempo anche Napoleone, lo rimunerarono con segnalate distinzioni. Un importante testimonianza dell'estimazione, in cui era tenuto, la ebbe nel 1790, quando al Commissario francese, che si recava in Italia a spogliarla dei suoi tesori d'arte, fu ordinato di attendere nello Stato il padre di Lagrange e presentargli le congratulazioni della Repubblica per le opere di suo figlio, il quale « aveva fatto onore all'intiero genere umano col suo genio, ed era special gloria del Piemonte di avergli dato i natali ».

254. Lagrange di persona era di media statura, non molto ben formato; aveva occhi smorti e cilestri; colorito scialbo. Era di carattere nervoso e timido; detestava le questioni, e per evitarle assai volentieri lasciava ad altri il merito di ciò, che egli stesso aveva fatto. I suoi studî furono essenzialmente informati alle Matemaitche pure; cercò ed ottenne di riestendere i risultati astratti, e fu ben pago di lasciarne agli altri le applicazioni. Infatti tutte le scoperte, anche di poca importanza, del suo gran contemporaneo Laplace, sono applicazioni ai fatti della natura delle formule di Lagrange, ad esempio i risultati di Laplace sulla velocità del suono e sull'accelerazione secolare della Luna sono implicitamente contenuti in quelli di Lagrange.

255. ***Laplace,*** *1749-1827.* — Pietro Simone Laplace era figlio di un contadino e forse di un fittaiolo di Normandia; e deve la sua educazione all'interessamento sorto in alcuni ricchi suoi vicini pel suo ingegno e per la sua bella presenza. Ben poco si sa della vita de' suoi primi anni; poichè salito in fama si tenne ben lontano dai suoi parenti e da chi l'aveva beneficato; questa picciolezza di carattere si rivelò spesso in seguito in parecchie sue azioni. Pare che verso il 1770 egli ottenesse un posto di assistente della scuola militare di Beaumont e quando potè conseguire una certa e sicura agiatezza, si diede a tuu'uomo alle ricerche originali. Poi divenne professore a Parigi, ove continuò ad occupare fino alla morte i diversi posti governativi ottenuti.

Digitized by Google

256. Durante gli anni 1784-1787 Laplace scrisse alcune Memorie di gran valore; fra queste la principale è quella, in cui egli determinò completamente l'attrazione di uno sferoide su un punto fuori di esso; essa è assai importante per la introduzione nell'analisi degli armonici sferici o coefficienti di Laplace e per l'estensione dell'uso del potenziale. Questa Memoria fu seguita da un'altra sulle ineguaglianze planetarie, cioè che la mutua azione di due pianeti non può mai alterare di molto la eccentricità e l'inclinazione delle loro orbite. Infine nel 1787 Laplace diede la spiegazione della relazione fra l'accelarazione lunare ed i secolari cambiamenti della eccentrità dell'orbita della Terra; questa ricerca completò la prova della stabilità del sistema solare, nella ipotesi che esso sia formato da un insieme di corpi rigidi.

257. Ora Laplace si impose il compito di fare un'opera « Che offrisse una soluzione compiuta del gran problema di Meccanica, presentato dal sistema solare, e facesse vedere come la teoria fosse esattamente in armonia coll'osservazione tanto, che le equazioni empiriche non avrebbero dovuto più a lungo trovar posto nelle tavole astronomiche ». I frutti di queste ricerche trovansi nella sua « *Exposition du système du monde* » e nella sua « *Mécanique céleste* ». La prima opera fu pubblicata nel 1796, nella quale diede una spiegazione generale del fenomeno ed un sommario della storia dell'Astronomia, ma omise tutti i particolari. La seconda opera contiene uno studio analitico compiuto del soggetto; i primi due volumi contengono i metodi per calcolare i moti de' pianeti, determinando le loro figure e risolvendo i problemi delle maree. Il terzo ed il quarto volume contengono l'applicazione di questi metodi ed anche parecchie tavole astronomiche. Il quinto ed ultimo volume è in gran parte storico; ma dà come appendici i risultati delle sue ultime ricerche. Quest'opera si deve considerare qualche cosa di più che una semplice traduzione del principio di Newton nel linguaggio del calcolo differenziale; imperocchè essa completa tutte quelle parti, che Newton nei loro particolari non era stato capace condurre a compimento.

258. Laplace si recò in gran pompa a pregare il primo Napoleone di accettare una copia della sua opera. Ora racconteremo

Digitized by Google

questo fatto, perchè è assai caratteristico ed è autentico. Avevano detto a Napoleone, che nell'opera di Laplace non vi era mai nominato Dio; Napoleone che era lieto di proporre spesso questioni imbarazzanti, ricevè Laplace coll'osservazione: « Signor Laplace, mi hanno detto, che voi avete scritto questa grande opera sul sistema dell'universo senza nominare mai nemmeno il suo Creatore ». Laplace, benchè fosse il più umile dei sudditi, tuttavia si mostrava rigido ed inflessibile in ogni punto della sua filosofia; allora si fece coraggio e rispose francamente: « Je n'avais pas besoin de cette hypotèse-là! » Napoleone rise grandemente, e riportò questa risposta a Lagrange, che esclamò: « Ah! c'est une belle hypothèse; ça explique beaucoup de choses! ».

259. Nel 1812 Laplace pubblicò la sua opera sulle probabilità; essa contiene un'esposizione del metedo dei minimi quadrati, che è un importante esempio della padronanza che Laplace possedeva dei procedimenti analitici. Il metodo dei minimi quadrati per la combinazione di numerose osservazioni era stato implicitamente dato da Gauss e da Legendre; ma il quarto Capitolo di quest'opera contiene una dimostrazione formale di esso, su cui fu di poi fondata la teoria degli errori (1).

260. Pare che Laplace abbia considerato l'Analisi come un semplice mezzo per trattare i problemi di Fisica, benchè la valentìa, colla quale inventasse l'analisi, che gli occorreva, fosse straordinaria. Finchè i suoi risultati eran veri, ben poco si curava di spiegare i passaggi, mediante i quali li avea ottenuti; mai studiò l'eleganza e la simmetria dei suoi procedimenti; si teneva ben pago, se in qualche modo poteva risolvere la questione, che stava studiando.

(1) Ecco una osservazione curiosa. (Vedi *La science et l'hypotèse* par E. Poincaré). « Un physicien èminent me disait un jour à propos de la loi des erreurs: Tout le monde y croit fermement parce que les mathematiciens s'imaginent que c'est un fait d'osservation, et les observateurs que c'est un thèoreme de mathématique ».

Lo si credè per molto tempo anche per il principio della conservazione della energia; ma ora si è dimostrato che essa è un fatto sperimentale.

Digitized by Google

261. La fama di Laplace avrebbe di molto guadagnato, se egli si fosse accontentato soltanto della sua alta opera scientifica; ma egli correva dietro anche alla fama politica. La disinvoltura e la rapidità, colle quali cambiava le sue opinioni politiche, secondo lo richiedevano gli eventi, avrebbero destato l'ilarità, se non fossero state così servili. Come crebbe la potenza di Napoleone, Laplace abbandonò i suoi principî repubblicani, e pregò il primo Console a dargli il posto di Ministro degli Interni. Napoleone, desideroso di avere l'appoggio degli scienziati, accettò l'offerta; ma in poche settimane si dovè assistere alla fine della carriera politica di Laplace. Il giudizio di Napoleone a questo riguardo è il seguente: « Géomètre de premier rang, Laplace ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail nous reconnûmes que nous nous etions trompé. Laplace ne saisissait aucune question sous son véritable point de vue: il cerchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques, et portait enfin l'esprit des « *infiniment petits* » jusque dans l'administration ».

Benchè Laplace fosse esonerato dalla sua carica, tuttavia desideravasi di conservare la sua fedeltà; onde fu nominato Senatore; e nel terzo volume della *Mécanique céleste* prepose una nota, nella quale diceva, che di tutte le verità terrene, che essa conteneva, la più preziosa all'autore era la dichiarazione, che così egli faceva della sua devozione verso il paciere di Europa. Per Laplace adunque Napoleone era un paciere. Qual paciere in verità! Ma dopo la Restaurazione fu cancellata questa dichiarazione in tutte le copie, che furono messe in vendita. Nel 1814 era ben evidente che l'impero cadeva; Laplace tosto si affrettò a presentare i suoi servigi ai Borboni; e nella restaurazione ottenne il titolo nobiliare di Marchese. Il suo ingegno fu utile in numerose Comissioni scientifiche, nelle quali servì; e probabilmente le sue relazioni, per la natura della sua falsa politica, furono sprezzate.

262. Che Laplace fosse vanitoso ed interessato non lo negano nemmeno i suoi più caldi ammiratori; la sua condotta vreso i benefattori della sua giovinezza e verso i suoi amici politici fu spregevole; mentre la sua appropriazione dei risultati di coloro,

Digitized by Google

che furono relativamente sconosciuti, sembra essere bene accertata; e fra questi àvvene tre, che poi crebbero in fama, cioè Legendre e Fourier in Francia, Joung in Inghilterra, i quali mai dimenticarono le ingiustizie, di cui erano stati vittima. D'altra parte si può dire, che in alcune questioni egli mostrò indipendenza di carattere, e mai nascose le sue vedute in religione, in filosofia ed in scienza, quantunque esse potessero dar ombra alle autorità allora al potere. Si può anche aggiungere che verso il termine della sua vita Laplace si mostrò specialmente generoso verso i suoi discepoli e ad un tempo tenne in pregio le loro opere; una volta distrusse una sua Memoria, affinchè un suo allievo potesse avere da solo il merito della scoperta, come aveva fatto prima Eulero.

263. ***Legendre,*** *1752-1833.* — Adriano Maria Legendre nacque a Tolosa, e studiò a Parigi. Fu nominato professore alla scuola militare di Parigi nel 1777, alla scuola Normale nel 1795; inoltre ottenne alcuni incarichi governativi di non grande importanza; ma l'influenza di Laplace fu fortemente contraria all'ufficio di pubblica ricognizione, che occupava; e Legendre che era uno studioso assai timido, accettò con rassegnazione l'oscurità, cui l'ostilità del suo collega l'aveva condannato.

264. L'Analisi di Legendre è eccellente, seconda solo a quella di Lagrange e di Laplace, benchè non sia così originale. Le sue Memorie sulle attrazioni, il suo uso degli armonici circolari (o zonali) e del potenziale, e le sue Note sulla Geometria e sul metodo dei minimi quadrati sono lavori di una certa importanza. Nella teoria dei numeri Legendre trattò la materia, per quanto era possibile, come una applicazione dell'algebra ordinaria; ma non riuscì a crearne una scienza da essere considerata come un'Aritmetica superiore, da formare così un nuovo ramo della Matematica. La sua opera sul Calcolo integrale contiene qualche esempio di integrazione per serie, di integrali definiti ed in particolare uno esteso studio delle funzioni beta e gamma. Trattò la teoria degl'integrali ellittici come un semplice ramo speciale di Analisi. Il metodo, col quale si trattano modernamente, si fonda sue quello introdotto nelle matematiche da Abel e da Jacobi; e la superiorità dei loro metodi fu subito riconosciuta da Legendre;

Digitized by Google

è quasi l'ultimo atto della sua vita fu di raccomandare le scoperte di questi due grandi Matematici, scoperte che egli ben riconosceva avrebbero fatto obliare i suoi lavori.

265. Le opere principali di Legendre sono: la sua *Théorie des nombres*, il suo *Calcul intégral*, le sue *Fonctions elliptiques* ed i suoi *Élément de géometrie*, pubblicati nel 1794, nei quali dimostra la irrazionalità di π^2, e ne divina la sua trascendenza.

266. ***La creazione della geometria moderna.*** — Mentre Eulero, Lagrande, Laplace e Legendre perfezionavano l'Analisi, un'altro gruppo di Matematici francesi estendeva il campo della Geometria co' metodi analoghi a quelli previamente adoperati da Desargues e da Pascal. I più eminenti fra questi Matematici furono: Monge, Carnot e Poncelet. Il progresso fatto dalla Geometria in questi ultimi tempi è largamente dovuto a Steiner, von Staudt, Möbius, Chasles e Cremona, dei primi quattro parleremo nel Capitolo seguente, del quinto nelle I^a^ Appendice.

267. ***Monge,*** *1746-1818.* — Era figlio di un piccolo mercantello girovago; studiò nel Collegio degli Oratoriani, in cui fu nominato insegnante. Nel Collegio militare di Mazière Monge si fece conoscere ed apprezzare dagli ufficiali superiori pel suo piano strategico di Beaune, nel quale aveva impiegato la Geometria; indi nel 1768 fu fatto professore in quel Collegio a patto, che i suoi risultati della Geometria descrittiva non li facesse conoscere a nessuno degli ufficiali superiori all'infuori. Nel 1780 fu nominato professore a Parigi. Negli anni 1781, 1786 e 1795 presentò all'Accademia francese parecchie Memorie sulle linee di curvature delle superficie, considerando le sezioni normali, ove la curvatura è massima o minima ecc.

Ottenne vari incarichi politici dal suo Governo; e nel 1794 fu nominato professore alla Scuola Normale; era affezionatissimo a Napoleone, da cui fu in seguito fatto professore nella *Scuola Politecnica* di Parigi, ove insegnò Geometria descrittiva. Nel 1800 furono pubblicate in un libro le sue lezioni col titolo: « *Géometrie descriptive* », della quale egli può considerarsi il creatore.

Nel 1805 pubblicò le sue due altre opere: *Application de l'algè-*

Digitized by Google

bre à la Géometrie, ed *Application de l'analyse à la Géometrie;* la 4ª edizione fu pubblicata nel 1819.

268. **Carnot,** *1753-1823.* — Carnot nacque a Nolay nel 1753 e morì a Magdeburgo nel 1823; studiò a Burgundi ed ottenne un posto nel corpo degl'ingegneri a Condè; sotto le armi si occupò sempre di Matematiche; raggiunse il grado di generale. e prese attivissima parte alla vita politica ed alla difesa della sua patria. Nel 1784 pubblicò un' *opera sulle macchine;* nel 1797 a Ginevra, ove si era rifugiato dopo il *coup d'état* di Napoleone I del 1796, pubblicò « *La métaphysique au calcul infinitésimal* ». Nel 1803 pubblicò la sua *Géometrie de position*, la quale tratta ad un tempo della Geometria descrittiva e della Geometria proiettiva, e contiene un'estesa discussione sul significato delle radici negative di un'equazione algebrica. Nella geometria elementare trovò il teorema che porta il suo nome: « Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, più o meno il doppio rettangolo costruito con uno di questi e colla proiezione dell'altro su quest'ultimo, secondo che l'angolo opposto a quel lato è ottuso od acuto ».

269. **Poncelet,** *1788-1867.* — Poncelet nacque a Metz nel 1788, e morì a Parigi nel 1867; entrò nel genio militare francese. Nel 1812 fu fatto prigioniero nella ritirata dell'armata francese da Mosca. Durante la prigionia si occupò a scrivere il « *Traité des proprietés projectives des figures* », pubblicato nel 1822, che fu per molto tempo una delle più note opere di Geometria. Mediante la proiezione centrale, la reciprocità e le figure omologiche egli stabilisce tutte le principali proprietà delle coniche e quadriche. Poncelet trattò pure la teoria dei poligoni; e pubblicò molte Memorie nel Giornale di Crelle; le più notevoli sono quelle, che dànno la spiegazione, coll'aiuto della dottrina delle continuità, enunciata da Carnot, delle soluzioni immaginarie nei problemi di Geometria.

270. **Lo sviluppo della Fisica matematica.** — È noto che Lagrange, Laplace e Legendre si occuparono generalmente del-

Digitized by Google

l'Analisi, della Geometria, dell'Aritmetica superiore e dell'Astronomia; però gli ultimi Matematici della scuola francese si dedicarono specialmente all'applicazione dell'Analisi matematica alla Fisica. Prima di discorrere di questi Matematici, si possono ricordare i nomi di due distinti fisici sperimentali inglesi: Enrico Cavendish (1731-1819) e Tommaso Young (1773-1829), delle cui opere fecero molto uso i loro contemporanei francesi.

271. ***Fourier,*** *1768-1830.* — Fourier prese parte importante nel suo proprio distretto a promuovere la Rivoluzione, e ne fu rimunerato colla nomina nel 1796 a professore della Scuola politecnica. Nel 1822 pubblicò la sua opera « *Sulla teoria analitica del calore* » in cui basò il suo ragionamento sulla legge di raffreddamento di Newton, cioè che la propagazione del calore fra due molecole adiacenti è proporzionale alla differenza infinitesima delle loro temperature. In quest'opera mostrò che ogni funzione di una variabile, o continua o discontinua, può svilupparsi in serie di seni dei multipli della variabile, risultato che è costantemente usato nell'Analisi moderna. Queste serie portano il suo nome.

272. ***Poisson,*** *1781-1840.* — Poisson per le sue applicazioni della Matematica alla Meccanica ed alla Fisica ha quasi la stessa fama di Fourier. Suo padre era stato soldato semplice; al suo ritiro dal servizio militare gli fu concesso un piccolo impiego amministrativo nel suo villaggio nativo. Quando scoppiò la Rivoluzione pare che egli abbia assunto il governo del suo paese; ed essendo lasciato indisturbato, divenne una persona di qualche importanza locale. Il figlio fu messo a balia; il padre racconta che un giorno essendo andato a visitarlo, trovò che la nutrice si era recata a diporto, mentre aveva lasciato il figlio sospeso con una funicella legata ad un chiodo confitto nel muro, poichè essa diceva, che quella era una necessaria precauzione per impedirgli di andare sui tetti in cerca di nidi. Inoltre aggiunge che gli sforzi ginnastici del figliuolo lo facevano sbattere continuamente da una parte all'altra; ed in questo modo egli nella tenerissima infanzia incominciò quegli studî sul pendolo, che tanto l'occuparono nell'età matura.

Digitized by Google

273. All'età di diciassette anni entrò alla Scuola politecnica, ove il suo ingegno richiamò l'attenzione di Lagrange e Laplace; ed alla loro morte occupò le loro cattedre. Una Memoria sulle differenze finite, che scrisse all'età di diciotto anni, fu giudicata sì favorevolmente da Legendre, che ne fu subito ordinata la pubblicazione. Come ebbe compiuto gli studî, subito fu nominato ripetitore della Scuola, e continò poi ad occupare per tutta la sua vita diversi posti scientifici governativi e varie cattedre. Egli aveva qualche cosa del socialista, e rimase un rigido repubblicano fino al 1815; quando vide, che era impossibile di formare un nuovo impero, si unì ai leggittimisti. Tuttavia non prese parte attiva alla vita politica, invece dello studio della Matematica ne fece un bisogno.

274. Delle sue Memorie di Matematica pura la maggior parte riguardano gl'integrali definiti e le serie di Fourier, le cui applicazioni ai problemi di Fisica costituiscono uno dei suoi principali titoli di distinzione; il suo saggio sul Calcolo delle variazioni, e le sue Memorie sulle probabilità dei risultati medi delle osservazioni. Delle sue Memorie di Matematica applicata forse le più notevoli sono quelle che riguardano la teoria della elettro-statica e del magnetismo, che diedero origine ad un nuovo ramo di Fisica matematica. Egli suppose in esse che i risultati fossero dovuti alle attrazioni ed alle repulsioni delle molecole imponderabili. Le più importanti delle Memorie sull'Astrofisica sono le due sulle ineguaglianze secolari dei moti medî de' pianeti e sulla variazione delle costanti arbitrarie, introdotte nelle soluzioni delle questioni di Meccanica. In esse Poisson studiò la questione della stabilità delle orbite planetarie (che Lagrange aveva sempre stabilito al primo grado di approssimazione per le forze perturbatrici, e dimostrò che il risultato può estendersi al terzo ordine d'infinitesimi.

275. ***La scuola francese circa il 1830.*** — Un periodo di eccezionale attività intellettuale in ogni scienza è seguito ordinariamente da un periodo di relativa sosta; onde dopo la morte di Lagrange, Laplace, Legendre, Fourier e Poisson, la scuola francese, che aveva conquistato una posizione sì eccelsa al prin-

Digitized by Google

cipio del secolo XVIII, cessò per alcuni anni (eccezione fatta per Cauchy, di cui parleremo più tardi) di produrre nuovo lavoro originale.

276. ***La introduzione dell'Analisi in Inghilterra.*** — L'isolamento della scuola inglese e la sua cieca devozione ai metodi geometrici ed al Calcolo delle flussioni costituiscono i caratteri più notevoli della sua storia durante la seconda metà del XVIII secolo; ne fu notevol conseguenza l'assoluta mancanza di qualsiasi importante e valido contributo al progresso della Matematica. Verso la fine del XVIII secolo i componenti la scuola matematica di Cambridge incominciarono a riconoscere che il loro isolamento dai loro contemporanei dal Continente per essi era assai dannoso. Il primo tentativo in Inghilterra per popolarizzare la notazione ed i metodi del Calcolo, come era usato nel Continente, fu dovuto a Woodhouse (1773-1827). È dubbio se egli da solo abbia portato in voga i metodi analitici; ma le sue vedute furono adottate con entusiasmo da tre dei più giovani: Babbage (1792-1810); Peocock (1791-1858); e Giovanni Herschel (1738-1822), che gli succedettero nel portare a compimento la riforma, che egli aveva suggerita.

Nel 1817 ed anche nel 1819 la notazione differenziale era impiegata negli esami universitari; e dopo il 1820 il suo uso fu definitivamente stabilito. A questo tenne dietro nel 1820 la pubblicazione di due volumi di esempi illustrativi del nuovo metodo, l'uno di Peocock sul Calcolo differenziale ed integrale, l'altro di Herschel sul Calcolo delle differenze finite.

Questi sforzi furono completati dalle numerose pubblicazioni di buoni libri di testo, ne' quali l'Analisi era usata di frequente. L'uso dei metodi analitici si estese da Cambridge al resto della Gran Bretagna, e dal 1830 in poi esso divenne generale.

Digitized by Google

CAPITOLO V.

La Matematica del secolo XIX.

277. ***Principio della nuova Èra.*** — Colla Matematica del XIX secolo può dirsi che incominci la nuova êra, caratterizzata specialmente da una grande estensione dei rami della Matematica pura, tali come: « La teoria dei numeri; l'Algebra superiore compresavi la teoria delle equazioni; la creazione della teoria delle funzioni, compresevi quelle di periodicità doppia e multipla; la Geometria superiore »; e particolarmente coll'aggiunta di molti rami di Fisica, trattati colla Matematica.

278. ***Origine della Scuola Germanica di Matematica.*** — Mentre la scuola francese, che segnava la fine dell'ultimo secolo, era entrata in un periodo di temporanea inattività, e la scuola inglese si era solo destata, riconoscendo l'importanza di fare un uso più esteso dell'analisi, *era già sorta una nuova Scuola Germanica*, la quale ha rinnovato assai profondamente la Matematica odierna. Si potrebbe ad un tempo osservare che ora le differenti nazioni del mondo occidentale sono così in intime relazioni fra loro, che le scuole dei paesi moderni e le epoche non sono separate come per lo addietro da insormontabili barriere.

Le opere, che esercitarono la maggiore influenza sui Matematici del secolo XIX, furono senza dubbio quelle di Gauss, di cui ora brevemente parleremo.

Digitized by Google

279. ***Gauss,*** *1777-1855.* — Federico Gauss nacque a Brunswick; suo padre faceva il muratore; gli fu data una educazione liberale dal duca regnante, quando conobbe il suo ingegno, contro la volontà decisa de' suoi genitori, che speravano di trar profitto dal suo salario di operaio. Nel 1792 andò a studiare al Collegio Carolina; e fin dal 1795 tanto i professori, quanto gli allievi ammettevano che Gauss conoscesse tutto quello che i primi gli insegnavano. Mentre era in Collegio studiò il metodo dei minimi quadrati, e dimostrò per induzione la legge della reciprocità quadratica. Poi si recò a Gottinga, ove studiò sotto Kästner; quivi fece molte delle sue scoperte sulla teoria dei numeri. Nel 1799 ritornò a Brunswick, e per vivere dovè dare qualche lezione privata.

280. Nel 1799 Gauss pubblicò la sua dimostrazione del teorema « Che ogni equazione algebrica ammette una radice »; di cui poi diede tre altre dimostrazioni. Nel 1801 poi pubblicò le sue *Disquisitiones Arithmeticae*, di cui parleremo in seguito. La sua successiva scoperta fu in un campo ben diverso dalla Matematica. L'assenza di qualsiasi pianeta nello spazio tra Marte e Giove, ove la legge di Bode avrebbe condotto gli osservatori a rintracciarcene uno, era stata per lungo tempo notata; ma fino al 1801 non fu osservato nessuno dei numerosi gruppi dei pianeti minori, che occupavano quello spazio. La scoperta fu fatta in condizioni, che parevano rendere impossibile la determinazione dell'orbita del pianeta chiamato Cerere. Fortunatamente le osservazioni furono comunicate a Gauss; egli calcolò i suoi elementi, e la sua Analisi dimostrò essere egli il primo degli Astronomi teorici, come era il più grande degli Aritmetici. L'attenzione richiamata da queste ricerche gli fruttò nel 1807 l'offerta della cattedra a Pitroburgo, che egli rifiutò. Nello stesso anno fu nominato direttore dell'Osservatorio di Gottinga e professore di Astronomia, posti che egli occupò fino alla morte. Gauss alcuni anni dopo il 1807 dedicò il suo tempo principalmente al suo Osservatorio; ma nel 1809 pubblicò un Trattato, che contribuì molto al perfezionamento dell'Astronomia pratica, e vi introdusse il principio della triangolazione curvilinea.

Digitized by Google

281. Le sue ricerche sulla Elettricità e sul Magnetismo datano circa il 1830; tra queste si possono ricordare due Memorie: l'una sulla teoria generale del Magnetismo terrestre; l'altra sulla teoria delle forze che agiscono secondo la legge dell'inversa del quadrato della distanza. Analogamente a Poisson trattò il fenomeno dell'elettro-statica come dovuto alle attrazioni e repulsioni fra due molecole imponderabili. In Elettro-dinamica scoprì nel 1835 che l'attrazione fra due molecole elettrizzate dipende dal loro moto rotatorio e dalla loro posizione, secondo la nota formula di Weber. Ma siccome egli non potè immaginare un'ipotesi fisica ragionevolmente probabile, da cui potesse dedursi il risultato, abbandonò l'argomento. Le sue ricerche sull'Ottica e specialmente sui sistemi di lenti furono pubblicate nel 1840. Ora ricorderemo brevemente alcune delle sue più importanti scoperte di Matematica pura.

282. La sua opera più interessante in Matematica pura è costituita dalle sue *Disquisitiones Arithemeticae.* Si sa che Gauss presentò questa sua opera all'Accademia di Francia, la quale ebbe l'imperdonabile leggerezza di respingerla come lavoro di nessun merito. Il Gauss n'ebbe un gran colpo, che influì non poco sulla sua carriera scientifica; imperocchè da quel dí innanzi fu molto restìo nel pubblicare i suoi lavori, ed in essi si studiò ad arte di essere assai conciso, tanto che riuscì spesso troppo oscuro: ecco le ragioni, per le quali le opere di Gauss furono ai suoi tempi poco note. Questo Trattato e l'opera di Legendre (sulla teoria dei numeri) sono classiche; ma precisamente, come nel suo studio sulle funzioni ellittiche, Legendre non riuscì a concepire nulla di nuovo in questa materia, ma si limitò soltanto a riguardare la loro teoria come un Capitolo di calcolo integrale, nello stesso modo che aveva trattato la teoria de' numeri come un Capitolo di Algebra. Gauss tuttavia mostrò che la teoria delle grandezze discrete od Aritmetica superiore era di specie diversa da quella delle grandezze continue od Algebra, così egli introdusse nell'Aritmetica superiore una nuova notazione e nuovi metodi di Analisi, di cui i Matematici posteriori si servirono largamente.

Digitized by Google

283. La teoria dei numeri può dividersi in due parti principali, cioè la teoria delle forme e la teoria delle congruenze. La soluzione del problema della rappresentazione de' numeri colle forme quadratiche binarie è dovuta a Gauss, il quale aggiunse inoltre alcuni risultati relativi alle forme quadratiche ternarie con due indeterminate; ma la estensione generale da due a tre indeterminate fu opera come vedremo di Eisenstein. Gauss pure studiò la questione dei residui biquadratici, ove la notazione dei numeri complessi della forma $a + bi$ fu da lui introdotta nella teoria dei numeri. Inoltre inventò la teoria delle congruenze di primo e di secondo ordine; studiò pure la soluzione delle equazioni binomie della forma $x^n = 1$; questa comprende il celebre teorema, che solo i poligoni regolari, che possono essere costruiti colla geometria elementare, son quelli di cui il numero dei lati è $2^m (2^n + 1)$, ove m ed n sono intieri e $2^n + 1$ è un Np.

284. La teoria moderna delle funzioni a periodicità doppia ebbe la sua origine dalle scoperte di Abel e Jacobi, i quali arrivarono entrambi alle funzioni theta. Ma Gauss aveva scoperte indipendentemente ed assai prima (1808) queste funzioni e le loro proprietà principali, essendo stato condotto ad esse da certi integrali, per calcolare i quali inventò la trasformazione ora legata al nome di Jacobi.

285. Fra le rimanenti Memorie di Gauss in Matematica pura le più importanti son quelle sulla Teoria dei determinanti; quella relativa alla dimostrazione del teorema, che ogni equazione numerica ha una radice reale od immaginaria; quella sulle serie ipergeometriche, che contiene uno studio della funzione gamma, ed infine una sulla interpolazione. La sua introduzione nei testi rigorosi del criterio di convergenza delle serie con un numero infinito di termini è assai notevole; abbiamo pure la importantissima Memoria sulla rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra, in cui sono generalizzati per tutte le superficie i risultati dati da Lagrange per le superficie di rivoluzione. Finalmente nella Teoria delle attrazioni abbiamo una Nota sull'attrazione degli elissoidi omogenei, ed una Memoria, nella quale è dimostrato, che le variazioni seco-

Digitized by Google

lari degli elementi dell'orbita di un pianeta, influenzato dall'attrazione di un pianeta disturbatore, sono le stesse, come se la massa del pianeta disturbatore fosse distribuita sopra la sua orbita in un anello ellittico in modo tale, che uguali masse dell'anello corrispondano agli archi dell'orbita descritta in tempi eguali. Fra le opere geometriche possiamo citare le « Disquisitiones generales circa superficies curves ».

286. Da quanto si è detto su Gauss si vede che il campo delle sue ricerche fu assai vasto; e si può aggiungere, che in molti casi queste ricerche servirono a dare nuovi indirizzi alla scienza. Egli fu tuttavia l'ultimo dei grandi Matematici, le cui ricerche furono d'interesse universale. Dall'epoca di Gauss la letteratura di parecchie branche di Matematica è cresciuta tanto, che i Matematici sono stati costretti a specializzarsi in qualche ramo o rami di essa.

287. ***Confronto degli stili di Lagrange, di Laplace e di Gauss.*** — I più grandi maestri dell'Analisi moderna sono Lagrange, Laplace e Gauss, che furono contemporanei. È interessante notare l'importante contrasto dei loro stili. Lagrange era perfetto tanto nella forma quanto nella sostanza; egli era lieto di spiegare il suo procedimento; e, quantunque i suoi argomenti fossero generali, essi sono facilissimi a seguirsi. Laplace d'altra parte non spiegava nulla; era assolutamente indifferente allo stile; e, soddisfatto che i suoi risultati fossero esatti, era contento di lasciarli agli altri senza dimostrazione, od anche con una alquanto difettosa. Gauss era esatto ed elegante quanto Lagrange; ma è anche più difficile da seguirsi di Laplace, poichè egli sopprime ogni traccia dell'Analisi, da cui ha ricavato i suoi risultati, e si studia di dare le dimostrazioni rigorose, ma per quanto sia possibile concise e sintetiche.

288. ***L'algebra e l'aritmetica superiore.*** — Le ricerche di Gauss sulla *teoria dei numeri* furono continuate e completate da diversi Matematici; principalmente da Lejeune-Dirichlet di Gottinga (1805-1859); da Riemann di Gottinga (1826-1866) e da Tchebycheff di Pietroburgo (1821-1894), che studiarono in

Digitized by Google

particolare la distribuzione degli Np; da Iacobi di Berlino, che scrisse sui residui; da Eisenstein di Berlino e da Enrico Smith di Oxford, delle cui ricerche ora parleremo brevemente; ma prima dobbiamo discorrere di Cauchy.

289. ***Cauchy,*** *1789-1857*. — Agostino Cauchy nacque a Parigi; studiò nella Scuola Politecnica, che fu il semenzaio di molti Matematici francesi di quell'epoca; ed abbracciò la professione d'ingegnere civile. Nel 1816, nella Restaurazione, l'Accademia francese fu purificata (all'uso borbonico s'intende!), e, ad onta dello scherno e della indignazione della società scientifica francese, Cauchy accettò la cattedra rimasta vacante coll'espulsione di Monge; ed allo stesso tempo fu nominato professore nella Scuola Politecnica. Nella rivoluzione del 1830 andò in esilio; ritornò in Francia nel 1837; e nel 1848 ed anche nel 1851 con speciale dispensa dell'imperatore gli fu accordato di occupare una cattedra di Matematica senza prestare il giuramento di fedeltà.

290. Fra le più importanti ricerche di Cauchy vi sono: *la discussione dei criterî per la convergenza delle serie; la determinazione del numero delle radici reali ed immaginarie di ogni equazione algebrica; il suo metodo di calcolare queste radici approssimativamente; la sua teoria delle funzioni simmetriche delle radici delle equazioni di grado qualunque; il suo calcolo* a priori *di una quantità minore della differenza minima fra le radici di un'equazione; e le sue Note sui determinanti* del 1841; che servirono a renderli di uso generale. Cauchy pure fece qualche tentativo per ridurre a scienza gli artifizî per determinare gl'integrali definiti; ma questo ramo del Calcolo integrale ancora rimane senza un metodo o sistema perfetto. La regola per trovare i valori principali degl'integrali fu enunciata da Cauchy, ed il calcolo dei residui fu una sua invenzione. La sua dimostrazione del teorema di Taylor sembra avere avuto origine da uno studio della doppia periodicità delle funzioni ellittiche. Sono in gran parte dovuti a lui tutti que' mezzi adoperati per mostrare la connessione fra i diversi rami di un argomento col dare valori immaginarî alle variabili indipendenti. Egli diede

Digitized by Google

pure un metodo analitico diretto per determinare le ineguaglianze planetarie di lungo periodo; e nella Fisica scrisse una Memoria sulla quantità di luce riflessa dalle superficie metalliche ed altre belle Memorie sull'Ottica. In molte delle sue Memorie, circa seicento e più, è troppo visibile la fretta febbrile, con cui esse furono redatte; e parecchie sono deturpate da oscurità, ripetizioni di vecchi risultati e da errori.

Cauchy pure tentò di dimostrare l'ultimo teorema di Fermat, cioè che non si può soddisfare con degli N_1 l'equazione indeterminata $x^n + y^n = z^n$; ma pure egli come il Lamé cadde in errore (1).

290 bis. ***Eisenstein,*** *1823-1852.* — La teoria delle forme quadratiche ternarie è dovuta ad Eisenstein. Considerò pure i teoremi relativi alla possibilità di rappresentare un numero come somma di quadrati, e dimostrò, che il teorema generale si limitava ad otto quadrati. I casi, in cui il numero dei quadrati è dispari, presentano qualche difficoltà. Eisenstein diede la soluzione del caso di tre quadrati; lasciò pure un abbozzo delle soluzioni del caso di cinque quadrati. Fra le altre sue ricerche si può ricordare la regola che egli enunciò sul criterio per riconoscere se una data serie rappresenta una funzione algebrica o trascendente; ma crediamo ch'essa non sia esatta.

291. ***Smith,*** *1826-1883.* — Enrico Smith è uno fra i più originali e potenti Matematici, che trattarono della teoria dei numeri. Egli nacque a Londra e morì ad Oxford. Studiò a Rugby e ad Oxford; nel 1861 fu eletto professore saviliano di geometria ad Oxford, ove risiedette fino alla morte. Il nome di Smith sarà sempre ricordato per la sua opera sulle equazioni indeterminate di primo grado e sulle congruenze e sull'ordine ed il genere delle forme quadratiche ternarie. Smith diede le dimostrazioni dei risultati di Eisenstein; li estese alle forme quadriche ternarie di un determinante piano; e diede una completa classificazione delle forme quadriche ternarie. Inoltre non si li-

(1) Vedi la mia Appendice alla mia Memoria sull'ultimo teorema di Fermat, già citata.

Digitized by Google

mitò al caso di tre indeterminate, ma riuscì a stabilire i principî, da cui dipende il caso di n indeterminate, ed ottenne le formule generali.

Si sa, da quanto aveva fatto conoscere Eisenstein, che la rappresentazione dei numeri mediante somme di 5 quadrati valeva solo per numeri non divisibili per un quadrato. Smith completò (1867) tale studio pel caso di 5 quadrati, e vi aggiunse i corrispondenti teoremi per il caso di sette quadrati. Quattordici anni dopo l'Istituto di Francia, ignorando il lavoro di Smith, scelse come argomento del suo « Grand Prix des Sciences mathématiques » la dimostrazione ed il compimento dei teoremi di Eisenstein per 5 quadrati. Smith redasse la dimostrazione dei suoi teoremi generali, limitando la dimostrazione dei risultati al caso speciale di cinque quadrati; e solo un mese dopo la sua morte, cioè nel Marzo 1883, il premio fu assegnato a lui.

Tutto ciò prova che quegli Accademici conoscessero sì poco le ricerche dei loro contemporanei inglesi e tedeschi su tale argomento da ignorare che la soluzione del problema che essi avevano proposto, si trovava proprio nella loro Biblioteca.

292. A questi Matematici possiamo aggiungere *Argand* (1768-1825); *Galois* (1811-1832), l'autore della teoria odierna dei gruppi; *De-Morgan* (1806-1871); *Sylvester*, che fondò la teoria degli invarianti e covarianti; *Sophus Lie* (1842-1899), che trattò la teoria dei gruppi continui di trasformazioni, applicandoli all'equazioni differenziali; *Alfredo Serret* (1819-1885), che lasciò dei libri di testo assai pregevoli di Algebra superiore e di Calcolo infinitesimale; *Giuseppe Bertrand* (1822-1900), autore di un classico Trattato di Calcolo infinitesimale e di uno di Algebra ecc.; *Carlo Hermite* (1822-1901), che lasciò parecchi lavori sulla teoria delle forme e sulle funzioni trascendenti; e dimostrò per la prima volta la trascendenza del numero e; a questo lavoro ispirandosi Lindemann di Munich dimostrò pel primo nel 1882 la trascendenza di e^{x_s}, ove x_s è una radice di un'equazione algebrica a coefficienti intieri; e da cui dedusse mediante la formula di Eulero $e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ che π, essendo $e^{\pi i} = -1$, è trascendente; d'onde l'impossibilità della quadratura del cerchio nella Geometria elementare.

Digitized by Google

293. ***La teoria delle funzioni a doppia e multipla periodicità.*** — Questo è uno degli argomenti, che fu molto studiato durante il secolo XIX. Abbiamo detto che Gauss scoprì le funzioni *theta* e le loro proprietà principali; ma le sue ricerche rimasero per molti anni nascoste nei suoi libri di appunti; lo sviluppo di questo ramo delle Matematiche è dovuto alle ricerche fatte tra il 1820 ed il 1830 da Abel ed Jacobi; ed i metodi adoperati da questi due Matematici hanno compiutamente sostituito quelli di Legendre; onde essi sono giustamente considerati come i creatori di questo nuovo ramo di Matematica.

294. ***Abel,*** *1802-1829.* — Abel nacque in Norvegia e morì ad Arendal all'età di ventisei anni. Le sue Memorie sulle funzioni ellittiche trattano questa materia dal punto di vista della teoria delle equazioni e delle forme algebriche, a cui fu condotto dalle sue ricerche. L'importante risultato, noto col nome di teorema di Abel, che fu poi applicato da Riemann alla teoria delle funzioni trascendenti, fu scritto nel 1828. Il nome di funzioni abelliane è stato dato ai trascendenti superiori di periodicità multipla, che furono per la prima volta studiati da Abel. A provare la fecondità delle idee di Abel ricorderemo la sua celebre dimostrazione di questo teorema: « È impossibile di risolvere un'equazione di quinto grado mediante radicali ».

295. ***Jacobi,*** *1804-1851.* — Jacobi nacque da genitori ebrei a Postdam; studiò all'università di Berlino; nel 1827 fu nominato professore a Königsberg; nel 1842 il governo prussiano gli diede una pensione; allora egli si recò a Berlino, ove risiedette fino alla morte.

296. Le più importanti ricerche di Jacobi sono quelle sulle funzioni ellettiche, la cui notazione odierna è dovuta a lui, ed è anche davuta a lui la loro teoria, che fu stabilita simultaneamente, ma indipendentemente, da Abel. Jacobi, come Abel, riconobbe che le funzioni ellittiche non erano un semplice gruppo di teoremi sulle integrazioni; ma che esse erano tipi di una nuova specie di funzioni, cioè quelle a doppia periodicità; d'onde la particolare attenzione che egli pose sulla funzione theta. Si

Digitized by Google

può dire che Jacobi ne incominciò lo studio col considerare i prodotti semplicemente infiniti, mentre Abel incominciò col considerare i prodotti doppiamente infiniti.

297. Fra le altre ricerche di Jacobi si può particolarmente ricordare le sue Note sui determinati e la sua invenzione della Jacobiana, cioè del determinante funzionale, formato dalle n^2 derivate parziali di primo ordine di n funzioni di n variabili indipendenti. Si può anche ricordare le sue Note sui trascendenti abelliani, le sue ricerche sulla teoria dei numeri, nelle quali dimostrò per primo la legge della reciprocità cubica, studiò la teoria dei residui, e diede una tavola dei residui delle prime radici; la sua importante opera sulla teoria delle equazioni a derivate parziali; il suo trattato del Calcolo delle variazioni, e le sue numerose Memorie sulla teoria planetaria, ed altri problemi particolari di Dinamica, nei quali egli estese la teoria delle equazioni differenziali.

298. ***Riemann,*** *1826-1866*. — Riemann, uno dei più originali e potenti Matematici di questo secolo, nacque in Annover, studiò a Gottinga sotto Gauss e poi a Berlino sotto Jacobi, Didichlet, Steiner e Eisenstein, i quali erano tutti professori a Berlino allo stesso tempo. Egli poi occupò una cattedra a Gottinga.

La prima Memoria di Riemann, scritta nel 1850, fu sulle funzioni algebriche ad una variabile complessa e sulla loro rappresentazione su delle superficie, che portano il suo nome. Nel 1854 scrisse la sua celebre Memoria intorno alla ipotesi, su cui è fondata la geometria. A questa tennero dietro le Memorie sulla teoria dei numeri e sulle funzioni ellittiche. Nelle funzioni periodiche multiple è appena superfluo dire, che egli fece per le funzioni abelliane ciò che Abel aveva fatto per le funzioni ellittiche; e ciò forse costituisce il suo principale merito. Nella teoria dei numeri studiò il numero degli Np, che cadono fra due numeri dati. Legendre aveva previamente dimostrato, che il numero degli Np, minori di n, è molto approssimativamente $\frac{n}{\log n - 1{,}08366}$; ma Riemann andò più in là. Questo suo la-

Digitized by Google

voro ed una Memoria di Tchebycheff contengono quasi tutto quello, che è stato fatto intorno ad un problema, che si è presentato da sè stesso a quasi tutti i Matematici, che si sono occupati di un tal soggetto.

299. ***Weierstrass,*** *1815-1897.* — Parlando delle funzioni avrei dovuto ricordare l'opera di Weierstrass, che era professore a Berlino. Nelle sue prime ricerche, egli le trattò sotto una nuova forma, nella quale esse sono espresse in potenze dei moduli. Da ultimo egli espose un metodo per trattare tutte le funzioni ellittiche in una maniera simmetrica, con cui ha esteso e cambiato totalmente la trattazione del soggetto. In questa teoria le funzioni theta sono indipendenti dalla forma delle loro superficie limiti.

300. La considerazione di algebriche, trigonometriche, ellittiche, iperellittiche ed altri speciali generi di funzioni preparò la via per una *teoria di esse*, che permise di creare un più importante e più esteso ramo di Matematica, che fu particolarmente studiato ed ampliato dai Matematici viventi.

301. La teoria dei numeri può considerarsi come un'aritmetica superiore, e la teoria delle funzioni ellittiche ed abelliane come una trigonometria superiore. La *teoria dell'algebra superiore* (compresavi la *teoria delle equazioni*) è stata profondamente studiata durante il secolo XIX, e fu un soggetto favorito di studio dei tre Matematici Cauchy, Hamilton e Cayley, del primo de' quali si è già parlato; ora diremo qualche cosa dei due ultimi.

302. ***Hamilton,*** *1805-1865.* — È opinione di alcuni scrittori che la *teoria dei quaternioni* sarà finalmente considerata una delle grandi scoperte del secolo XIX; essa è dovuta a sir William Roman Hamilton. Egli nacque da genitori scozzesi; nel 1824 entrò nel collegio della Trinità di Dublino; la sua carriera universitaria è singolare, poichè divenuta vacante nel 1827 la cattedra di Astronomia, mentre era ancora laureando, egli fu richiesto dagli elettori a reggere detta cattedra; e fu poi eletto all'una-

Digitized by Google

nimità, stabilendo che egli sarebbe lasciato libero di proseguire i suoi studî secondo il proprio indirizzo. Egli occupò questa cattedra fino alla morte.

303. Le sue prime ricerche furono sull'Ottica e la sua prima Memoria fu pubblicata su questo argomento nel 1828. Le sue lezioni sui quaternioni furono pubblicate nel 1852. Fra le sue altre Memorie si possono specialmente ricordare quella sulla forma della soluzione dell'equazione algebrica generale di quinto grado, che confermò le conclusioni a cui erano giunti Ruffini ed Abel, cioè che essa non può essere espressa in funzione dei suoi coefficienti colle operazioni e funzioni più elementari; quella sulle funzioni fluttuanti; quella sull'odografo; e da ultimo quella sulla soluzione numerica delle equazioni differenziali.

304. ***Grassmann,*** *1809-1877.* — L'idea dell'Algebra non commutativa e dei quaternioni sembra essere venuta in mente a Grassmann, professore a Stettino, presso a poco allo stesso tempo che ad Hamilton. Le ricerche di Grassmann sull'Algebra non commutativa sono contenute nel suo *Ausdehnungslehre*, pubblicato per la prima volta nel 1844, e totalmente rifatto nel 1862. Il metodo scientifico di trattare i principî fondamentali dell'Algebra, iniziato da Hamilton e da Grassmann, fu continuato da De-Morgan e da Boole, uno dei fondatori della logica matematica; poi fu ulteriormente sviluppato da H. Hankel e da G. Cantor. Grassmann studiò pure le proprietà degli iperspazi omaloidali.

305. ***Cayley,*** *1821-1895.* — Cayely nacque a Londra; studiò a Cambridge e fu professore sadleriano di Matematica pura a Cambridge stesso dal 1863 fino alla morte. I suoi scritti sono numerosissimi, e comprendono un gran numero di soggetti di Matematica pura. Il suo metodo di trattarli generalmente tende ad essere algebrico. Più d'uno ha osservato che egli ha molti punti di contatto con Eulero, e pel posto occupato e pei metodi adoperati.

Digitized by Google

306. Fra le sue ricerche posso particolarmente ricordare le sue dieci classiche Memorie sulle quantiche (forme binarie e ternarie) e le sue ricerche sull'Algebra non commutativa, specialmente sulle matrici. Egli fu il primo Matematico a studiare i prodotti doppiamente infiniti ed a determinarne la loro periodicità; le sue ultime ricerche sulle funzioni ellittiche sono trattate principalmente colla teoria della trasformazione e dell'equazione modulare. Egli trattò poi anche molti problemi, che avevano per oggetto di estendere la geometria analitica; ed in particolare introdusse in essa il concetto così detto, poco felicemente, *assoluto*.

306 bis. ***Plücker,*** *1801-1868.*—Giulio Plücker di Bonn si dedicò prima specialmente allo studio delle curve algebriche (Analytische geometrische Enkwickelungen, Essen 1828-31); poi ai Sistem der analytischen Geometrie, 1835; Theorie der algebraischen Curven, 1839; System der Geometrie des Raumes, 1846). Sono celebri le sue formule riguardanti le singolarità delle curve (Geometria enumerativa).

Nel 1847 scambiò la cattedra di Matematica con quella di Fisica e le sue successive ricerche riguardarono gli spettri ed il magnetismo. Però, dopo quasi venti anni nei quali aveva abbandonato lo studio della Geometria per darsi a quello della Fisica, ritornò alla scienza che dapprima gli aveva procacciato la fama; e nel 1865 concepì una geometria dello spazio avente per elemento la retta, idea che diede origine all'opera intitolata « *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement* (Lipsia, 1868-69). Però le sue prime comunicazioni sull'argomento, che contengono solo gli enunciati, furon fatte alla Società reale di Londra (Philosophical Transactions, 1863, p. 725, e 1866 p. 361).

307. In ***geometria analitica*** e generalmente in *analisi*, compresovi il calcolo e le equazioni differenziali, il progresso durante il secolo XIX è stato grandissimo come in altri rami della scienza; onde non è facile dare un conciso sunto dei risultati, ottenuti con un linguaggio non tecnico, tanto più che gran parte di essi son dovuti ai Matematici viventi.

Digitized by Google

308. ***La geometria sintetica moderna.*** — La geometria sintetica moderna si può dire che abbia avuto la sua origine coi lavori di Monge nel 1800, di Carnot nel 1803 e di Poncelet nel 1822. Ma questi solo confusamente preannunziarono la grande estensione che essa avrebbe ricevuto in seguito da Möbius, da Steiner e da Von Staudt in Germania; da Chasles in Francia, e da Cremona in Italia, del quale parleremo nella Iª Appendice.

309. ***Möbius,*** *1790-1868.* — Möbius nacque a Schulporta in Prussia: studiò a Gottinga sotto Gauss, poi a Lipsia e ad Halle. Nel 1815 in Lipsia fu docente privato, e nell'anno successivo professore straordinario di Astronomia, e nel 1844 professore ordinario; occupò questa cattedra sino alla morte. Le più importanti delle sue ricerche sono in Geometria, che pubblicò nel Journal di Crelle, e la sua celebre opera Der Barycentische Calcul (il Calcolo baricentrico) Lipsia 1827. Come indica il suo nome questo calcolo è fondato sulle proprietà dei centri di gravità.

Möbius scrisse anche sulla Statica e sull'Astronomia; generalizzò la trigonometria sferica col far variare i lati o gli angoli di un triangolo al di là di 180°. La raccolta delle sue opere fu pubblicata in 4 vol. a Lipsia (1895-1897).

310. ***Steneir,*** *1796-1868.* — Steiner « il più grande geometra dall'epoca di Apollonio in poi »; nacque a Utzensdorf. Suo padre era un contadino; ed il figlio non ebbe modo di imparare a leggere ed a scrivere fino all'età di 14 anni; a 18 anni divenne allievo di Pestalozzi. Egli poi si recò a studiare a Heidelberg, e quindi a Berlino, vivendo col frutto delle lezioni private. Le sue ricerche furono raccolte in un'opera pubblicata nel 1872, che contiene un ampio studio del principio di dualità e delle relazioni proiettive ed omografiche delle punteggiate, dei fasci, delle stelle ecc., basate sulle proprietà metriche. Questi lavori formarono subito la sua fama; onde fu creata per lui a Berlino una cattedra di Geometria, che egli occupò sino alla morte. La più importante delle altre sue Memorie riguarda principalmente le proprietà delle curve e delle superficie algebriche, pedali e *roulette*, ed i massimi e minimi; in esse il ragionamento è pura-

Digitized by Google

mente geometrico. Le opere di Steiner possono considerarsi come costituenti l'autorità classica nella geometria sintetica moderna.

311. ***Von Staudt,*** *1798-1867.* — Un sistema intieramente differente di Geometria pura fu proposto nel 1847 da von Staudt, professore di Matematica ad Erlangen. Dalla Geometria egli bandì tutto ciò, che si riferisce ai numeri, come la teoria della misura, ed alle grandezze. Ad onta di questa forma essenzialmente astratta stabilì le proprietà proiettive non metriche delle figure, studiò i punti, la retta, i piani immaginari ed ottenne anche una definizione geometrica del numero. Questa geometria è stata adoperata dal Culmann come base fondamentale della Statica grafica. Le sue opere principali sono: « Beiträge zur Geometrie der Lage », e « Geometrie der Lage » (Geometria di posizione).

311.bis Intimamente connessa al soggetto della Geometria moderna è la *Statica grafica,* in cui si dànno le regole per risolvere vari problemi coll'aiuto del disegno; i metodi di calcolo, che vi si possono adoperare, si traggono dalla Geometria moderna. Questo metodo di trattare le questioni è stato sino ad ora applicato principalmente ai problemi di meccanica, di elasticità, di elettricità, ed è specialmente utile in ingegneria ed in que' problemi, in cui un esperto disegnatore può essere capace ad ottenere soluzioni approssimate di gran parte delle equazioni differenziali o di altre, di cui facilmente può servirsi; e certo non commetterà errori maggiori di quelli assegnati in ogni caso, in conseguenza della nostra imperfetta conoscenza delle proprietà dei materiali impiegati. Questo nuovissimo ramo è stato studiato in questi ultimi anni da molti Matematici e specialmente in Italia dal Cremona e dal Saviotti, in Isvizzera dal Culmann che fondò la sua Statica grafica sulla Geometria di posizione di Staudt.

312. ***Chasles,*** *1793-1880.* — Michele Chasles è nato ad Epernon; nel 1812 entrò a studiare nella Scuola Politecnica di Parigi, ove si laureò ingegnere con lode. Nel 1841 vi fu nominato professore di Geodesia e di Meccanica; e poi fu fatto professore

Digitized by Google

di Geometria superiore nella facoltà di scienze di Parigi. Egli scrisse moltissime Memorie sulla Geometria superiore.

Nel 1837 pubblicò la sua pregevolissima opera: « *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie* », che contiene la storia della Geometria ed in Appendice un trattato « *Sur deux principes généraux de la science* ». L'*Aperçu historique* è un libro classico nella storia delle scienze geometriche; l'Appendice contiene la teoria generale della omografia e del principio di dualità. Egli introdusse nella Geometria il termine di *rapporto anarmonico*. Le sue numerose Memorie furono pubblicate nel *Journal de l'Ecole Polytechnique*, ove diede una risoluzione delle cubiche. Nel 1864 pubblicò nei *Comptes rendus* una serie di Note *sul metodo delle caratteristiche e sul principio di corrispondenza*, che applicò alla risoluzione di un gran numero di problemi. Il metodo delle caratteristiche costituisce la base della Geometria enumerativa. Fu Chasles che introdusse nella Geometria proiettiva le proprietà non proiettive delle figure mediante la distanza immaginaria infinita sferociclica. È pur notevole la soluzione che egli diede nel 1846, mediante la Geometria sintetica, del difficilissimo problema dell'attrazione che esercita un elissoide su un punto esterno ad esso.

313. ***La Meccanica teorica, la Dinamica, l'Astronomia.*** — In questi ultimi tempi tali scienze hanno assunto uno sviluppo considerevole; ma in un piccolo sommario come questo non possiamo parlare nemmeno succintamente delle tante ricerche fatte da molti valenti Matematici in queste discipline; tra essi ricorderemo Bessel (1784-1846), Leverrier (1811-1877), ed Adms (1819-1892), Donati (1826-1893), Secchi (1818-1878), De-Gaspari (1819-1892), Tisserand (1845-1896), e Schiaparelli (1835-1910) in Astronomia.

E nella Meccanica ricorderemo Gabriele Lamé (1795-1870) che scrisse un Trattato sull'elasticità ed una Memoria sulle superficie ortogonali; dimostrò pure l'ultimo teorema di Fermat ($x^n + y^n = z^n$) pel caso di $n = 7$; ma quando volle dimostrarlo in generale cadde in errore come il suo maestro ed amico Cauchy.

Digitized by Google

314. ***La Fisica matematica.*** — La storia delle recenti applicazioni della Matematica a numerosi problemi di Fisica sul calorico, sulla luce, sulla elasticità, sulla elettricità e su altri rami è così estesa, che qui non si potrebbe dare un ragguaglio compiuto, benchè anche questa parte dovrebbe essere compresa in una storia delle Matematiche. Ma le principali applicazioni essendo state fatte in gran parte dai Fisici viventi, si potrebbe omettere anche di parlarne; tuttavia si possono ricordare: Green (1793-1841); Clerk Maxwell (1831-1879); von Helmoltz (1821-1894); Sir Georgs Stokes (1821-1894); Sir William Thomson, ora Lord Kelvin (1824-1907), che pubblicò in due Vol. insieme a P. G. Tait il « Treatise on Natural phylosophy, che è un Trattato di Fisica matematica; e Lord Rayleigh (1842-1919). L'opera di Maxwell in particolare è stata riestesa colla sua influenza alle teorie dell'elettricità, del magnetismo e della luce; Maxwell scartò tutte quelle ipotesi artificiali prima in voga, e spiegò il fenomeno coi moti e colle forze di un solo mezzo materiale elastico, che pervade lo spazio ed è conosciuto col nome di etere.

È interessante di far notare che è dovuto alla Matematica gran parte del progresso, che si è verificato in questi ultimi tempi nelle scienze fisiche; ed è certo che un buon Fisico al dì d'oggi bisogna che sia anche un discreto matematico.

315. ***La così detta geometria non-euclidea.*** — Durante il secolo XIX furono fatte moltissime generalizzazioni, che riguardano anche i fondamenti di due delle più antiche branche delle Matematiche: l'Algebra e la Geometria. Nella prima furono estese le leggi delle operazioni; nella seconda furono esaminati profondamente gli assiomi principali; e si è arrivati alla conclusione « Che lo spazio definito cogli assiomi di Euclide non è il solo possibile spazio non contraddittorio ». Euclide dimostrò (I-27) che « Se una linea retta tagliando due altre rette, fa gli angoli alterni-interni ecc. eguali, le due rette sono tra loro parallele ». Non potendo in alcuna maniera dimostrare che in ogni altro caso le due rette non sono parallele, Euclide *assunse* ciò mediante il 12mo postulato e da alcuni detto l' 11mo; ma questo così detto postulato è tutt'altro che evidente. Dopo secoli di disperati, ma fruttuosi tentativi, di dimostrare il postulato di Euclide, nacque

Digitized by Google

nella mente di parecchi Matematici l'ardita idea di poter fondare una Geometria senza assumere il postulato delle parallele. Mentre silenzioso Legendre si sforzava di stabilire il postulato delle parallele con una dimostrazione rigorosa, Lobatschewsky diede alla luce un'opera, nella quale assumeva il postulato contrario quello di Euclide; e questo lavoro fu il primo di una serie, che eran tutti destinati a mettere in chiaro le oscurità dei concetti fondamentali e ad estendere il campo della Geometria.

316. ***Lobatschewsky,*** *1793-1886.* — Nicola Ivanovitch Lobatschewsky nacque a Makarief in Nischni-Nowgorod in Russia; studiò a Kasan e dal 1827 al 1846 fu professore e rettore di quella università. Le sue vedute sui fondamenti della Geometria furono la prima volta fatte conoscere al pubblico in un discorso, tenuto davanti alla facoltà di Matematica e di Fisica di Kasan e poi stampato nel *Messenger* nel 1829, e quindi nel *Gelehrte Schriften der Universität* (Kasan 1836-1838) col titolo « *Nuovi elementi di Geometria con una teoria completa delle parallele* ». Questo lavoro essendo stato scritto in russo, rimase perciò per molto tempo sconosciuto agli stranieri; ma anche in Russia esso non destò alcun interesse. Nel 1840 pubblicò in Berlino un breve ragguaglio delle sue ricerche. Lobatschewscky creò una « *Geometria ideale* » com'egli la chiamava, che Clifford descrisse come « del tutto semplice, puramente euclidea, senza l'ipotesi viziosa ». La parte importante di essa è la seguente: « Per un punto di un piano si può condurre in esso un numero infinito di rette, che non taglino una retta data dello stesso piano ». Una Geometria consimile fu ideata indipendentemente da Bolyai in Ungheria, che la chiamò « *Geometria assoluta* ».

317. ***Bolyai,*** *1775-1856.* — Wolfango Bolyai de Bolya nacque a Szekler-Land in Transilvania. Dopo avere studiato a Jena, si recò a Gottinga, ove divenne amico intimo di Gauss, allora novantenne. Gauss usò dire che Bolyai fu il solo uomo, che aveva intieramente compreso le sue vedute nella metafisica della Matematica. Fu fatto poi professore al Collegio *Riformatore di Maros-Vàsàrhely*, ove per quarantasette anni di seguito ebbe per suoi allievi gran parte degli odierni professori della Transilvania. Le

Digitized by Google

prime pubblicazioni di questo acuto ingegno furono drammi e poesie. Vestiva abiti da contadino a foggia antica; era assai originale nella vita privata e così nel suo modo di pensare; egli era modestissimo. Disse che nel suo sepolcro non avrebbe voluto alcun monumento, all'infuori di un *pomo*, in memoria dei tre pomi: i due di Eva e di Paride, che precipitò la terra nell'inferno, e quello di Newton, che di nuovo elevò la terra nel cerchio de' corpi celesti. Suo figlio, Giovanni (1802-1860), aveva studiato per la carriera delle armi, e si segnalò di molto nella Matematica; fu un appassionato violinista ed un celebre schermitore. Una volta accettò la sfida di trentatre uffiziali a patto, che dopo ciascun duello, potesse suonare un pezzo col suo violino; ed egli li vinse tutti.

318. La principale opera di matematica di Wolfango Bolyai comparve in due volumi negli anni 1832 e 1833 col titolo: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos* purae.... *introducendi*. Essa è seguita da un'Appendice, composta da suo figlio Giovanni « *Sulla scienza assoluta dello spazio* ». Queste ventisei pagine resero immortale il nome di Giovanni Bolyai. Non pubblicò altro; ma lasciò un migliaio di pagine manoscritte, che non sono state mai lette da un Matematico competente. Pare che suo padre sia stata la sola persona in Ungheria, che realmente apprezzasse i meriti dell'opera del proprio figlio. Per ben trentacinque anni questa Appendice, come pure le ricerche di Lobatschewsky, rimasero quasi intieramente dimenticate. Finalmente Riccardo Baltzer della università di Giessen nel 1867 richiamò l'attenzione su queste meravigliose ricerche.

319. La ***pangeometria*** non fu ideata solo dai Matematici russi ed ungheresi; imperocchè quando una copia dell'opera *Tentamen* di Bolyai arrivò nelle mani di Gauss, egli rimase assai sorpreso nel vedere che in essa era esposto ciò, che egli stesso aveva ideato molto prima, ma che aveva lasciato nelle sue note. Così prima del 1792 era arrivato a ricerche di quel genere. Le sue lettere a questo riguardo mostrano che nel 1799 egli fu condotto a dimostrare *a priori le realità* del sistema di Euclide; ma una trentina d'anni di poi arrivò alle conclusioni ottenute da Lobat-

Digitized by Google

schewsky e da Bolyai. Nel 1829 scrisse a Bessel stabilendo che la sua « convinzione, cioè che la Geometria non si può fondare completamente *a priori*, era divenuta, se era possibile, sempre più salda » e che « se il numero è semplicemente il parto della nostra mente, lo spazio è pure una realtà oltre la nostra mente, di cui noi non possiamo intieramente prestabilire le leggi *a priori* ».

320. Il termine di geometria non-euclidea è dovuto a Gauss. Recentemente Beltrami richiamò l'attenzione dei Matematici (Lincei Rendiconti 1889) sui tentativi di Girolamo Saccheri, padre gesuita di Milano, coi quali nel 1733 (Euclides ab omni aevo vindicatus ecc. Milano 1733) precorse le dottrine di Lobatschewsky coll'angolo parallelo. Anche G. B. Halsted pubblicò, che Lambert aveva pur egli scritto una Nota « Zur Theorie der Parallellinien » pubblicata nel *Leipziger Magazin für reine und augewandte Mathematik* 1786, in cui: 1.° La insufficienza dell'assioma delle parallele nelle superficie sferiche dà una geometria colla somma degli angoli di un triangolo maggiore di due retti. 2.° Affine di fondare una geometria possibile colla somma degli angoli di un triangolo minore di due retti occorre una sfera immaginaria (pseudo-sfera). 3.° In uno spazio, in cui la somma degli angoli di un triangolo è diversa da due retti, àvvi una misura assoluta (l'unità naturale per le lunghezze di Bolyai).

321. Eugenio Beltrami scrisse la classica Memoria « Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea (Giornale di Matematica del Battaglini, VI, 1868; Annali di Matematica, II), trattandola analiticamente, nella quale arriva alle importantissime conclusioni che i teoremi della Geometria non-euclidea trovano la loro realizzazione sulle superficie a curvatura costante negativa. Studiò pure le superficie a curvatura costante positiva e trovò l'interessante teorema che lo spazio a curvatura costante positiva è contenuto nello spazio a curvatura costante negativa.

Però disgraziatamente l'Hilbert nelle Trans. of the American mathem. society, 2, 1901 nella sua Memoria « Uber Flächen von Konstanter Gaussjcher Krümmun » ha dimostrato che « *Non esistono superficie di curvatura costante negativa regolari in tutta*

Digitized by Google

la loro estensione ». Sicchè come ben dice il professore Loria nella Biblioteca matematica (30 decembre 1901) la rappresentazione immaginata dal Beltrami nel suo « *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* » (Giornale di Matematica del Battaglini di Napoli, 6, 1868. pp. 284-312) è dunque assai limitata. È bene di ricordare che prima dell'Hilbert il professore Genocchi di Torino in una delle sue migliori Memorie (Sur un mémoire de Daviet De Foncenex et sur le Géometries non-euclidéenne, Mem. della r. Accad. delle scienze di Torino 29_2) aveva sostenuto non essere dimostrato, che l'equazione a derivate parziali, caratteristica delle superficie di curvatura costante negativa, ammetta almeno un integrale soddisfacente a tutte le condizioni imposte alla pseudo-sfera per servire alla rappresentazione del Beltrami: l'Hilbert dimostrò, che si verificava precisamente il contrario.

322. Nel 1854 Riemann con una sua classica Memoria richiamò l'attenzione sulla geometria non-euclidea, nella quale dimostrò che vi sono tre specie di iperspazî a tre dimensioni, che hanno proprietà analoghe alle tre specie di iperspazî a due dimensioni. Questi sono caratterizzati da questo fatto: o si può condurre da qualunque punto ad una superficie data nessuna superficie geodetica parallela ad essa, od una sola o più, sapendosi che dicesi linea geodetica di una superficie quella che segna tra due punti di essa la minima distanza, e che per superficie geodetica intendesi quella, che contiene tutte le linee geodetiche, che congiungono due punti.

323. Le ricerche di Beltrami, di Riemann e di Helmoltz sono concordi nelle conclusioni, cioè che sulle superficie a curvatura costante possiamo fare tre geometrie: 1ª La *non-euclidea* su una superficie a curvatura costante negativa. 2ª La *sferica* su una superficie a curvatura costante positiva. 3ª La *euclidea* su una superficie a curvatura costante nulla. Queste tre geometrie non si contraddicono fra loro, ma sono rami di uno stesso tronco, una trinità geometrica.

Alle ricerche del Beltrami nel 1891 tennero dietro quelle di Felice Klein di Gottinga (1849-1925); egli dimostrò la indipendenza della geometria proiettiva dal postulato delle parallele, e

Digitized by Google

scegliendo convenientemente la legge della misura della distanza fra due punti, dedusse dalla geometria proiettiva la geometria *sferica euclidea* e pseudosferica, da lui chiamate rispettivamente: geometria *ellittica*, *parabolica* ed *iperbolica*.

324. Il De Paolis dimostra nei suoi « Elementi di geometria » a pag. 464, come si può stabilire la teoria delle parallele indipendentemente dal postulato di Euclide, venendo alla conclusione che per un punto: 1° Non si possono condurre rette parallele ad una retta data. 2° O se ne può condurre una ed una sola. 3° O se ne possono condurre due e due sole. Basando tutte le ulteriori ricerche sopra una qualunque di queste tre possibili ipotesi, le quali non involgono contraddizioni, si possono fondare tre geometrie logicamente vere: La prima *ellittica*, la seconda *parabolica*, la terza *iperbolica*. Come caso particolare di quest'ultima si può dedurre la Geometria parabolica, che è la Geometria euclidea ordinaria, supponendo retto l'angolo di parallelismo. Ora sorge spontanea la domanda: « Quale delle tre geometrie è quella dello spazio nostro? » La questione non è stata ancora risolta; ma però è indiscutibile *che se la Geometria euclidea non è assolutamente vera*, essa *è verificata nei limiti della nostra esperienza*.

325. ***Klein.*** — Felice Klein, nacque a Düsseldorf il 25 aprile 1849, e morì a Gottinga il 22 giugno 1925. Fece e compì gli studî (1865) secondari a Düsseldorf, gli universitari a Bonn, ove ebbe a maestro Plüker, di cui divenne assistente sino al 1868. Durante il suo assistentato il Klein fu messo al corrente delle idee, che dovevano sboccare nella geometria della retta nello spazio; e quando morì Plüker egli ebbe l'incarico di ultimare e dirigere la stampa della celebre « *Neue Geometrie des Raumes* », che può dirsi il testamento scientifico del Plüker. Alla stessa diramazione della Matematica appartiene la sua tesi di laurea (12 dic. 1868). Studiò poi a Gottinga, attrattovi dalla fama del Clebsch; indi a Berlino, ove allora v'insegnavano Weierstrass e Kummer; poscia a Parigi con S. Lie.

Le pubblicazioni fatte dal Klein nei primi volumi dei *Mathematische Annalen* gli valsero, dietro proposta del Clebsch, la nomina a soli 23 anni di età a prof. ordinario nell'Università di

Digitized by Google

Erlangen, ove esordì con quelle splendide « *Considerazioni comparate sui vari indirizi della ricèrca geometrica* ». Nel 1875 il Klein dall'Università di Erlangen passò al Politecnico di Monaco, d'onde nel 1880 passò all'Università di Lipsia, per poi raggiungere l'Università di Gottinga, ove rimase fino alla morte.

Numerosi sono gli scritti matematici del Klein, che egli stesso raccolse in 3 volumi intitolati « *Gesammelte mathematische Abhandlungen* » (Berlino, Spinger, 1921-1923).

Il Klein fu un insegnante impareggiabile; devoti discepoli han promesso di pubblicare le sue lezioni ora litografate.

Il Klein negli ultimi mesi della sua vita pubblicò la sua celebre « *Elementarmathematik von einem höheren standpukt aus* ».

Lo spirito filosofico e l'indole organizzatrice, che egli possedeva, lo posero a capo di numerose opere collettive; infatti ricordiamo la grande *Enciclopedia* delle quattro Accademie; le pubblicazioni della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico; e l'opera d'insieme intitolata « *Die Kultur der Gegenwart* ». Inoltre ci piace di qui ricordare le dodici belle Conferenze tenute a Chicago dal Klein in occasione della Esposizione (1892) pel Congresso di Matematica, raccolte dal Prof. Alex Ziwet e tradotte in francese da M. L. Laugel, intitolate « *Conferences sur les Mathématiques* » Parigi, A. Hermonn (1898).

Digitized by Google

APPENDICE I.ª

Sui Matematici italiani.

326. In questa appendice parleremo di que' Matematici italiani, che non sono stati ricordati precedentemente nel sommario o furono appena accennati.

327. ***Campano**, circa il 1260.* — Giovanni Campano da Novara fece una nuova traduzione di Euclide, che sostituì tutte le altre e servì di base alle edizioni che furono pubblicate di poi. Scrisse pure la teoria dei pianeti, che era una traduzione libera dell'Almagesto.

328. ***Bombelli**, circa il 1530.* — Raffaello Bombelli di Bologna nel 1572 pubblicò un'Algebra di grande importanza. Egli discute i radicali reali ed immaginari, e tratta la teoria delle equazioni, e nel caso irriducibile mostra che un'equazione di 3° grado ha tutte le radici reali. Osservò che la trisezione dell'angolo è un problema identico a quello di un'equazione di 3° grado.

329. ***Ferrari**, 1522-1562.* — Ludovico Ferrari di Bologna, allievo del Cardano, fu il primo a risolvere le equazioni del quarto grado; egli ridusse l'equazione di Colla alla forma

$$(x^2 + 6)^2 = 6ox + 6x^2 ;$$

per rendere poi quadrati perfetti ambi i membri di essa introdusse la nuova incognita y, aggiungendo ad entrambi: $2\,(x^2 + 6)\,y + y^2$, e così ottenne:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)\, x^2 + 60x + (12y + y^2);$$

la condizione perchè il 2° membro sia un quadrato perfetto è:

$$(2y + 6)\,(12y + y^2) = 900.$$

Estraendo la radice quadrata dall'equazione biquadratica si ha:

$$x^2 + 6 + y = x\sqrt{2y + 6} + \frac{900}{\sqrt{2y + 6}}$$

Risolvendo l'equazione cubica in y e sostituendo, si ricade in un'equazione di 2° grado in x. Ferrari risolse altre equazioni biquadratiche.

330. ***Del-Monte,*** *1545-1607*. — Guidobaldo Del-Monte da Pesaro scrisse sulla Meccanica, sulla Prospettiva e sulla Cosmografia; fu precursore e mentore del sommo Galileo (1).

331. ***Cataldi,*** *1548-1626*. — Pietro Antonio Cataldi di Bologna, che insegnò Matematiche a Firenze, a Perugia ed a Bologna, fu il primo che fece uso delle frazioni continue; ed il suo nome è legato a questo importantissimo algoritmo aritmetico, mediante il quale si è riuscito a dimostrare la esistenza dei numeri trascendenti e l'irrazionalità di e, π, π^2 ecc.

332. ***Maurolico,*** *1553-1575*. — Maurolico da Messina scrisse il Trattato delle coniche al solo uso della gnomonica, intitolato « *De lineis horariis libri III* ». Nella trigonometria introdusse le secanti, e ne pubblicò una tavola nel volume « *Theodosii sphae-*

(1) Si sta pubblicando un'opera su Guidobaldo Del Monte dai Prof. Volterra, Loria, Gambioli.

Digitized by Google

ricorum libri III, 1558 ». Fu il primo ad introdurre l'uso delle lettere in luogo dei numeri nel calcolo dell'aritmetica, e diede le prime regole dell'algoritmo algebrico. Maurolico con questa innovazione voleva elevare le operazioni numeriche alla stessa generalità ed alla stessa astrazione, che le operazioni grafiche della Geometria, il cui esempio si presenta all'occhio e può essere anche seguito mentalmente, ed ha il singolar vantaggio di prestarsi a mille applicazioni diverse.

333. ***Torricelli,*** *1608-1647*. — Evangelista Torricelli da Faenza discepolo di Galileo, è noto più come Fisico, che come Matematico. Scrisse sulla quadratura della cicloide e delle coniche ed ha scritto pure una Memoria sulla curva logaritmica ed altre curve. In Fisica studiò la teoria del barometro, il valore della gravità; nella Meccanica la teoria dei proieti ed il moto de' fluidi.

334. ***Viviani,*** *1622-1703*. — Vincenzo Viviani, altro discepolo di Galileo, nacque a Firenze; nel 1657 diede una rifazione dell'ultimo libro di Apollonio sulle coniche, e nel 1701 una ristaurazione dell'opera di Aristarco. Nel 1677 fece vedere come si possa trisecare un angolo mediante un'iperbole equilatera. Nel 1692 propose il celebre problema di costruire quattro ovali in una volta emisferica in modo, che la superficie rimanente possa determinarsi esattamente.

335. ***Ceva,*** *1648-1734*. — Giovanni Ceva nacque in Mantova e vi morì durante l'assedio del 1734. Egli fu un valente idraulico; e come tale venne impiegato dal Governo di Mantova. Si occupò anche di Matematica, e fu autorevole e primo scrittore di Economia Politica; il titolo della sua opera economica è: « *De Re nummaria quoad fieri potuit geometria tractata, ed illustrissimos, et excellentissimos dominos Preasidem. Quoestemeque huius arciducalis Carsaraei Magistratus* ». Mantuae 1678.

Nel 1678 pubblicò in Milano l'opera « *De lineis rectis* » che contiene il teorema che porta il suo nome, cioè:

« Quando tre rette, uscenti dai vertici di un triangolo, s'incontrano in un punto, i segmenti che esse determinano sui lati

Digitized by Google

opposti sono tali, che il prodotto di tre di essi, che non hanno estremità comune, è uguale al prodotto degli altri tre »; analogo a quest'altro: « Quando un piano incontra i quattro lati di un quadrilatero gobbo, vi determina otto segmenti tali, che il prodotto di quattro di essi, che non hanno estremità comune, è uguale al prodotto degli altri quattro ». Teoremi che Stewart estese ulteriormente.

336. ***Guarini,*** *1671.* — Guarini pubblicò nel 1671 un trattato sulle coniche. Un'altra sua opera, che nessuno storico ricorda è la seguente: « *Euclides adauctus et methodicus, mathematicoque universalis*, in folio in più di 700 pagine su due colonne, Torino 1671 ». Essa contiene trentacinque trattati su diverse parti della Geometria teorica ed applicata. La trentaduesima può riguardarsi come un Capitolo della Geometria descrittiva odierna. Egli tratta della proiezione sui piani; delle linee, che si ottengono dalla intersezione della sfera, del cono e del cilindro fra loro; dello sviluppo sul piano di queste curve a doppia curvatura. Egli è pure autore di un'opera di Astronomia « *Mathematica coelestis*, in latino, Milano 1683 », e di un'altra opera « *Placida philosofia*, in settimo, Parigi 1666 » ecc.

337. ***Grandi,*** *1671-1742.* — Guido Grandi nacque a Cremona; egli era frate Camaldolese; insegnò Filosofia a Firenze, ed a Pisa divenne Ispettore delle acque di Toscana. Le sue principali opere sono: *Geometria demostratio vivianorum problematum* (Firenze, 1699); *Geometrica demostratio theorematum trigonianorum* (Firenze, 1701); *Quadratura circolo et hiperbolae* (Pisa, 1703); *De infiniti infinitorum infinitisque parvorum ordinibus* (Pisa,, 1720); *Floris geometrici ex rhodanearum et claeliarum curvarum description risultantes* (Venezia, 1728).

I teoremi che formano il soggetto della 2ª sua opera, enunciati già da Huyghens, furono dimostrati da Grandi. In essa si tratta della rettificazione della cissoide, delle ricerche sulla logaritmetica ed i solidi da esse generati ecc. Nella sua *Quadratura circoli et hyperbolae* Grandi osserva la analogia che presentano il cerchio e l'iperbole equilatera. Le sue *rodonee* sono curve piane, mentre le sue *clelie* sono delle curve a doppia curvatura,

Digitized by Google

tracciate sulla superficie della sfera. Grandi dà la quadratura delle parti della superficie sferica determinata dalle *clelie*, problema già trattato da Pappo.

338. ***Manfredi,*** *1681-1761*. — Gabriele Manfredi nacque e morì a Bologna. Fu professore di Matematica in quella Università fino al 1720, e membro dell'Istituto delle Scienze di detta città. Si deve a lui l'integrazione dell'equazioni differenziali omogenee con due variabili. I suoi lavori sono: 1° *De Constructione aequationem differentialium primi gradus* (1707); 2° *De Formulis quibusdam integrandis* (1731); 3° *De eliminandis ab aequetione arcubus circularibus et alia* (1748); 4° *De inveniendi datorum formularum irrationalium reciproci* (1755); 5° *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte delle equazioni differenziali di 1° grado*; 6° *Soluzione di un problema appartenente al calcolo integrale.*

339. ***Riccati,*** *1676-1754*. — Il conte Giacomo Francesco Riccati da Venezia fu un grande propagatore della filosofia newtoniana in Italia. Oltre l'equazione nota col suo nome, di cui studiò certi casi d'integrazione, discusse la questione della possibilità di abbassare l'ordine di una data equazione differenziale. Le sue opere furono pubblicate in Treviso nel 1758 in quattro volumi. Egli ebbe due figli, i quali scrissero pur essi su diversi punti di minor importanza, riguardanti il Calcolo integrale e le equazioni differenziali, e li applicarono a parecchie questioni di Meccanica; questi furono *Vincenzo* (1707-1775) e *Giordano* (1709-1790).

340. ***Malfatti,*** *1731-1807*. — Giovanni Francesco Malfatti nacque in Ala; esso è celebre per il seguente problema da lui proposto nel 1803 e che porta il suo nome: « Fare tre fori cilindrici in un prisma triangolare in modo, che i cilindri ed il prisma abbiano la stessa altezza e che il volume dei cilindri sia massimo ». Questo problema fu ricondotto ad un altro, ora generalmente noto come problema di Malfatti: « Inscrivere tre cerchi in un triangolo in modo, che ciascun cerchio sia tangente a due lati del triangolo ed agli altri due cerchi ». Malfatti diede una soluzione analitica del suo problema.

Digitized by Google

341. ***Fagnano,*** *1682-1762.* — Il conte Giulio Carlo Fagnano dei marchesi Toschi è nato a Senigallia; fu il primo a studiare le funzioni ellittiche. Non riuscendo a rettificare l'ellisse e l'iperbole, tentò di determinare gli archi, la cui differenza potesse essere rettificabile. Fece vedere la notevole analogia che esiste fra gl'integrali, rappresentanti l'arco di un cerchio e l'arco della lemniscata. Ma egli deve considerarsi anche come algebrista, poichè collaborò degnamente alla creazione della teoria dei numeri complessi ed allo sviluppo dei metodi di risoluzione delle equazioni algebriche letterali di ordine inferiore a cinque. Tutti i lavori del Fagnano sono raccolti in due volumi dell'opera intitolata « Produzioni matematiche ».

Dimostrò anche la formula:

$$\pi = 2i \log \frac{1-i}{1+i},$$

ove è

$$i = \sqrt{-1}. \qquad (1)$$

341 bis. ***Fagnani Gian Francesco,*** *1715-1787.* — È figlio di Giulio, fu canonico in Senigallia; oltre essersi esercitato con lode nella poesia, si dedicò egli pure allo studio delle Matematiche; ed è autore del Trattato inedito « Sopra le proprietà antiche e nuove dei Δ^i » da lui composto in emulazione di quello del padre e contemporaneamente senza che l'uno sapesse i progressi dell'altro. Altri lavori di G. F. Fagnani furono inseriti negli *Acta Eruditorum* di Lipsia, nel Giornale dei Letterati d'Italia e nella *Raccolta Calogerà.* L'elenco di essi trovasi nella *Biblioteca matematica italiana dall' origine della stampa ai primi anni del sec. XIX* del Riccardi (Modena 1870).

Fra i lavori pubblicati negli *Acta eruditorum* ricorderemo questo bel teorema che porta il nome del Fagnani: « Il perimetro del Δ ortico di un Δ è il minimo dei perimetri dei Δ^i inscritti in quest'ultimo ».

(1) Le opere di Fagnani sono state ripubblicate in 3 vol. per cura dei Prof. Volterra, Loria, Gambioli (Società ed. Alighieri, Roma, 1911).

Digitized by Google

342. ***Mascheroni,*** *1750-1805.* — Mascheroni Lorenzo nacque in Castagneto vicino a Bergamo; scrisse parecchie opere di Matematica: una sulle volte; un'altra sulla *poligonometria e poliedrometria;* e nel 1795 la sua *Geometria del compasso*, nella quale si risolvono i problemi della geometria euclidea coll'aiuto del sol compasso. Poncelet aveva fatto vedere come i detti problemi si potevano risolvere colla sola riga.

343. ***Ruffini,*** *1765-1822.* — Paolo Ruffini nacque in Modena, ed insegnò in quella Università medicina, meccanica e matematica. Fu il primo a dimostrare il celebre teorema, che porta il suo nome: « Non si possono risolvere algebricamente le equazioni di grado superiore al quarto, cioè non si può dare nessuna soluzione mediante le operazioni fondamentali e le estrazioni di radici con indici della forma 2^n, fatte suoi suoi coefficienti ». La dimostrazione di Ruffini è alquanto laboriosa; e certo sarebbe riuscita più semplice, se egli avesse conosciuto la teoria delle sostituzioni, che per primo intravide l'Abbati di Modena (Conte Marescotti) suo amico.

344. ***Chelini,*** *1802-1878.* — Domenico Chelini toscano ed escolopio scrisse importanti opere in Geometria analitica e nella Meccanica.

345. ***Bellavitis,*** *1803-1880.* — Giusto Bellavitis nacque a Bassano; pubblicò nel 1835 e nel 1837 negli Annali delle scienze del R. Istituto veneto il suo *Calcolo delle equipollenze;* pubblicò anche un'Algebra ed una Geometria descrittiva che chiamò derivata, opere di un certo pregio. Ma in ogni modo la sua fama egli la deve al Calcolo delle equipollenze, il quale fu nelle sue mani un potente mezzo di dimostrazione e di ricerca di verità geometriche.

346. ***Betti,*** *1823-1892.* — Enrico Betti nacque nei pressi di Pistoia; insegnò Matematiche nell'Università di Pisa. Il suo nome, come quello di Brioschi, è legato alla risoluzione delle equazioni di 5° grado mediante funzioni ellittiche. Pubblicò molte Memorie sulla *risoluzione delle equazioni algebriche*, *sopra l'abbassamento delle funzioni ellittiche*, *sopra la teoria delle sostituzioni*,

Digitized by Google

sulla teoria delle forme; scrisse più di venti interessantissime Memorie di Fisica-matematica, e pubblicò quell'aureo trattato sul potenziale dal titolo: « *Le forze newtoniane* ». Insieme al Brioschi tradusse gli « Elementi di Euclide », e da solo l'« Algebra elementare del Bertrand ».

347. ***Brioschi,*** *1824-1897.* — Francesco Brioschi nacque in Milano; insegnò Matematiche nell'Università di Pavia e poi fu professore e direttore della scuola Politecnica di Milano. Brioschi scrisse oltre duecento e più Memorie; fu uno dei più grandi analisti che vanti l'Italia, e senza dubbio il primo algebrista. Il suo nome come quello di Hermite e di Kronoker è legato alle equazioni di 5° grado, che egli risolvette mediante le funzioni ellittiche. Pubblicò un magnifico *Trattato* sui determinanti, e ne propugnò in Italia l'uso e lo diffuse. Scrisse importantissime Memorie sulle funzioni trascendenti, e si dice che a lui le funzioni ellittiche eran familiari come ad altri possono essere le trigonometriche. Scrisse molte Memorie sulla teoria delle forme, sulla teoria delle trasformazioni; dimostrò che il prodotto della somma di otto quadrati per un somma di otto quadrati è una somma di otto quadrati; Angelo Gnocchi l'ha generalizzato per una somma di 2^n quadrati. Il Brioschi era un grande algebrista calcolatore. Insieme al Betti contribuì a rialzare l'insegnamento della geometria elementare nelle nostre scuole medie, facendo sostituire al metodo di Legendre quello euclideo.

348. ***Battaglini,*** *1826-1894.* — Giuseppe Battaglini nacque in Napoli; insegnò Matematiche nelle università di Roma e di Napoli; è uno dei matematici italiani che ebbe ingegno versatilissimo. Fu il fondatore (1863) del Giornale di Matematica, che ancora porta il suo nome. Scrisse molte Memorie, circa ottanta, su tutti i rami delle Matematiche; tradusse in italiano le opere del Todhunter e la teoria delle sostituzioni del Netto. Le principali sue Memorie son quelle che riguardano la Geometria superiore; ma scrisse anche sulla partizione de' numeri e sui determinanti. Coltivò con ardore gli studi di Geometria non euclidea: le sue pubblicazioni originali su quest'argomento furono iniziate colla Memoria sulla Geometria immaginaria di Lobatschewscky

Digitized by Google

(1867), si chiudono con quella sull'affinità circolare non euclidea (1876). Egli fu un divulgatore instancabile in Italia di questi studî; basti rammentare la traduzione da lui fatta delle opere di Lobatschewscky e di Bolyai.

349. ***Beltrami***, *1835-1900*. — Eugenio Beltrami nacque a Cremona e morì a Roma; insegnò Meccanica, Matematica e Fisica-matematica nelle università di Bologna, di Pisa, di Pavia e di Roma. Il Beltrami ha scritto più di centoventi Memorie sui diversi rami delle Matematiche: in Geometria analitica, in Geometria infinitesimale, in Analisi pura, nella Meccanica ed in Fisica-matematica. Ricorderemo solamente le seguenti Memorie: 1ª *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, nella quale fa vedere come sulle superficie a curvatura costante negativa si possono dimostrare tutti i teoremi della geometria non-euclidea. Ma, come si è detto più sopra, l'Hilbert ha dimostrato, che ciò non si può fare nella intiera superficie, perchè essa non è regolare in tutta la sua estensione. 2º *Sulla superficie di rotazione, che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche;* 3º Teorema di geometria pseudo-sferica, in cui dimostra che conducendo dai punti di una retta nel piano euclideo le parallele nel senso lobatscheschiano ad un'altra retta perpendicolare alla prima, l'inviluppó di quelle è precisamente la curva meridiana della pseudosfera (trattrice).

350. **Cremona.** — Luigi Cremona nacque a Pavia il 7 Dicembre 1830, e morì a Roma il 10 Giugno 1903. Compì i suoi studî liceali ed universitari nella sua città nativa; nel 1848 lasciò la scuola per arruolarsi volontario e partecipare alla prima guerra dell'indipendenza italiana; restò sotto le armi sino all'Agosto 1849, ossia fino alla capitolazione di Venezia; e dopo tornò all'Università di Pavia a proseguire gli studî sotto la guida dell'illustre Brioschi; e vi conseguì la laurea ed il diploma di abilitazione all' insegnamento secondario. Incominciò la sua carriera d'insegnamento in qualità di libero conferenziere nel Liceo di Pavia, poi fu nominato professore al Ginnasio di Cremona, indi al Liceo di Milano, all'Università di Bologna, al Politecnico di Milano, ed infine nel 1873 fu chiamato

Digitized by Google

a Roma a riordinare la Scuola degli Ingegneri, di cui fu nominato Direttore, e la facoltà di Matematiche di quell'Università, in cui fu professore di Geometria superiore. Il Cremona fu insignito delle più alte onorificenze nostrane e straniere, appartenne a tutte le più importanti Accademie ed Istituti scientifici d'Italia ed esteri, fra i quali la Società Reale di Londra, da cui anni or sono fu nominato membro. Inoltre conseguì le cariche più elevate; fu nominato senatore del Regno, e nel 1898 Ministro della Istruzione, che resse dal 1° al 29 Giugno, nemmeno un mese.

L'opera scientifica del Cremona fu tale che per essa salirono fra noi in onore quegli studî di Geometria pura, che già avevano fiorito in Francia per opera di Monge, Poncelet, Chasles; ed in Germania specialmente per opera di Steiner; qui ci limiteremo a dare un rapido sguardo all'opera di questo grande geometra italiano.

Nella sua « *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* » svolse con metodo uniforme molti risultati nuovi, e dimostrò sinteticamente tutte quelle proposizioni, che prima di allora erano state trattate coll'Analisi.

Una delle Memorie veramente classiche del Cremona è quella « *Sulle superficie del terzo ordine* », che ottenne il premio Steiner dall'Accademia Reale di Berlino. Egli diede delle superficie del terzo ordine una rappresentazione piana, desumendola dalla loro genesi proiettiva con tre stelle collineari di piani, ed altrove fece vedere il partito che si può trarre dal concetto di rappresentazione nello studio delle superficie algebriche. Il maggior merito scientifico del Cremona è di avere per il primo dato una teoria sistematica di quelle trasformazioni birazionali, che giustamente si chiamano *cremoniane*, in cui si tratta dello studio di quelle corrispondenze fra i punti di due piani (o di due spazî) tali che le coordinate di un punto di ciascuno dei due piani (o spazî) sono funzioni razionali delle coordinate di un punto dell'altro. Mediante la considerazione di queste trasformazioni proiettive, si ricavano moltissimi ed importanti risultati, tra i quali notevolissimi quelli, a cui pervenne Nöther, riuscendo a sciogliere le singolarità superiori di nuove curve algebriche. Il concetto delle trasformazioni cremoniane, associate al concetto rieman-

Digitized by Google

niano del genere di una funzione algebrica, che il Clebsch trasportò felicemente nel campo geometrico, innestando sull'albero geometrico quel ramo rigoglioso dell'Analisi coltivata dal genio profondo di Abel e Riemann, ha contribuito efficacemente a formare quella parte delle Matematiche, chiamate dal Segre « *Geometria sull'ente algebrico* ».

Non va taciuto un altro merito del Cremona, che è quello di avere contribuito a diffondere in Italia i principî della Geometria proiettiva col suo eccellente trattato « *Elementi di Geometria Proiettiva* », che fu tradotto in più lingue, e di aver consigliato l'insegnamento di questa materia nelle nostre Università.

Inoltre introdusse in Italia lo studio della Statica grafica e consigliò l'insegnamento di questo ramo importantissimo delle Matematiche applicate nelle nostre Scuole d'ingegneria.

351. ***Casorati,*** *1835-1890.* — Felice Casorati nacque e morì a Pavia; insegnò in quella Università Algebra e Geometria analitica, e poi Calcolo infinitesimale, e Geodesia teoretica nel Politecnico di Milano. La sua prima pubblicazione (1856) fu: « *Intorno alla integrazione delle funzioni irrazionali* ». Nel 1858 pubblicò la pregevole Memoria « *Intorno ad alcuni punti dei minimi quadrati* ». Gli scritti del Casorati procedono sempre con molta spontaneità e semplicità, con forma corretta e con ordine da renderli di pregio e di facile lettura.

I lavori del Casorati sono 47, il cui elenco trovasi nel *Compendio di Storia della Matematica* di Rouse Ball, Gambioli, Loria. Qui ricorderemo la sua importantissima opera (1° vol.) intitolata: « *Teoria delle funzioni di variabile complessa* », cui doveva seguire un 2° volume, che non fu mai pubblicato. Questo libro è di gran pregio, e dovrebbe essere consultato da chi intende occuparsi di questo ramo importantissimo delle Matematiche.

Qui ci piace di ricordare che nel 1868-69 in Milano i proff. Brioschi, Casorati e Cremona tennero tre memorabili corsi, cui assistettero molti professori nostrani e stranieri. Questi corsi furono memorabili non solo pel valore degl'insegnanti, ma per l'importanza degli argomenti, che erano sulla teoria delle funzioni abelliane:

Digitized by Google

1° I metodi di Iacobi (Brioschi); 2° di Clebsch e Gordan (Cremona); 3° di Riemann (Casorati). In quest'ultimo il Casorati dopo avere esposto ampiamente colla abituale sua lucidità i teoremi fondamentali sulle funzioni monodrome e polidrome, condusse gli uditori con mano maestra all'apprendimento della superficie riemanniane e delle sue splendide applicazioni.

Egli è un fatto che il Casorati, il Brioschi, il Cremona ed il Beltrami non solo resero celebre la scuola matematica lombarda, ma colla loro opera contribuirono immensamente a far rivivere e ad allargare in Italia il campo degli studî matematici, che a dire vero erano caduti alquanto in basso; e richiamarono coi loro lavori l'attenzione dei Matematici stranieri; così si conquitarono una meritata fama mondiale.

352. ***Dini,*** *1845-1919.* — Ulisse Dini nacque e morì in Pisa. Conseguita la laurea nel 1865, andò a perfezionarsi (1865-66) a Parigi. Ritornato in Italia, fu subito (1866) nominato Professore della Università di Pisa, ove insegnò dapprima Geodesia teoretica, Algebra superiore, infine Calcolo infinitesimale ed Analisi superiore.

Nel 1880 pubblicò l'opera intitolata « *Sulle serie di Fourier e su altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di un variabile reale* », lavoro di gran pregio, che è stato di molto apprezzato anche dagli stranieri: esso serve di preparazione allo studio della Fisica matematica.

Un'altra opera del Dini, pubblicata due anni prima, nel 1979, pure di gran pregio, è intitolata: « *Fondamenti per la Teoria delle funzioni di variabili reali* ».

I lavori del Dini sono una quarantina, il cui elenco trovasi nel *Compendio della Storia della Matematica* Rouse-Ball-Gambioli-Loria, pubblicati in gran parte nel Giornale di Battaglini, negli Annali di Matematica, nei Rendiconti dell'Accademia dei Licei, dell'Istituto Lombardo ecc.

Finalmente citeremo il suo « *Trattato di calcolo infinitesimale* » prima pubblicato in litografia, poi in tre volumi stampati.

L'opera del Dini come scienziato ha contribuito non poco a diffondere in Italia lo studio dei nuovi metodi, impiegati nell'Analisi infinitesimale e superiore, ed a rialzarne le sorti. La sua

Digitized by Google

opera poi come insegnante è riuscita oltremodo efficace, poichè alla eleganza ed alla chiarezza della esposizione, il Dini accoppiava una grande facondia; le sue lezioni riuscivano addirittura affascinanti. È superfluo il dire che dalla scuola del Dini uscirono valenti Analisti, che fecero e tuttora fanno onore alla scienza italiana, ed al loro maestro.

353. ***Segre***, *1863-1924*. — Corrado Segre nacque a Saluzzo e morì a Torino, studiò nella Università di Torino, ove conseguì la laurea (1883) con lode. Dal 1883 al 1888 fu assistente in detta Università dei proff. D'Ovidio e Bruno, infine nel 1888 vinse il concorso per la cattedra di Geometria superiore, che tenne per ben 36 anni.

Il Segre portò importanti contributi alla geometria proiettiva (a 3 dimensioni), fra l'altro nel campo della geometria della retta ed in quello degli elementi immaginari.

Studiò ampiamente la geometria a più dimensioni e la teoria delle quadriche, nella prima delle quali aveva una particolare competenza.

Per iniziativa specialmente del Segre e del Castelnuovo ebbe inizio l'applicazione dei metodi proiettivi iperspaziali allo studio della « Geometria sopra una curva algebrica ». Inoltre il Segre si valse del concetto per lo studio di una corrispondenza fra due curve algebriche della rigata, costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti omologhi delle due curve ecc. ecc. Con questo campo di principale importanza nacque così un nuovo procedimento di ricerca essenzialmente geometrica ed *italiana*, che contribuì non poco a conseguire nuovi risultati ed a permettere nuovi punti di vista ed utili sguardi d'insieme.

Fu una creazione del Segre verso il 1890 la teoria degli enti iperalgebrici.

Più tardi nel 1912 il Segre studiò la rappresentazione di un altro sistema di punti immaginari, aventi per coordinate i così detti « *numeri duali* » mediante omografie fra i punti ordinari delle rette dello spazio.

Un altro notevolissimo gruppo di lavori del Segre dal 1907 in poi appartiene al campo della geometria proiettiva differenziale.

Il numero dei lavori del Segre è di 128, il cui elenco trovasi

Digitized by Google

nella Negrologia del Loria, pubblicata negli *Annali di matematica pura ed applicata*, seria 4ª, tema II, fascicolo I, 1924.

Nel *Compendio di Storia delle Matematiche* di Rouse-Ball-Gambioli-Loria, Vol. 2° nella IIª appendice si trova alle pp. 306-307 l'elenco dei corsi di lezioni annuali del Segre fatti nella Università di Torino dall'anno scolastico 1888-1889 al 1923-24, nei quali il Segre ha trattato argomenti di alta importanza.

Il Segre oltre essere un sommo geometra, era ad un tempo un grande insegnante.

354. ***Bagnera,*** *1865 - 1927* (1). — Nacque in Bagheria (Palermo) il 14 novembre 1865 e morì in Roma il 12 maggio 1927. Orfano a dieci anni di ambedue i genitori, dovette superar da sè le prime difficoltà della vita, aiutandosi con lezioni impartite ai compagni di scuola.

Terminati gli studî tecnici a Palermo, ivi si laureò in Ingegneria nel 1890 ed in Matematica nel 1895. Fu assistente all'Università di Palermo e professore nel R. Educatorio Maria Adelaide di Palermo. Libero docente di Analisi algebrica nel 1899; professore straordinario di Algebra e Geometria analitica nella Università di Messina dal 1901, divenne ordinario nel 1905 e restò a Messina fino al disastroso terremoto del 1908, passando indi all'Università di Palermo e nel 1922 a quella di Roma, come professore di Analisi infinitesimale, coll'incarico dell'Analisi superiore. Fu per lunghi anni Preside della Facoltà di Scienze di Palermo e Direttore della Scuola superiore di commercio nella stessa città. Fu socio di varie Accademie italiane (fra le quali quella dei Lincei e la Società dei XL) e professore onorario dell'Università di Washington.

Dal Cesaro e dal Gerbaldi ebbe le spinte iniziali alla ricerca scientifica. Esordì, ancora studente, con due eleganti e lucidi lavoretti di Algebra sui determinati e sulle serie. Si occupò poscia della convergenza delle serie thetafuchsiane e dello studio algebrico-geometrico della curva dei contatti tripunti delle curve di un fascio e di una rete di curve piane. Ma le sue ricerche più cospicue si svolsero nell'ambito dei gruppi finiti, giacchè anche la cooperazione data al De Franchis per lo studio sulle superficie

(1) **Questa Biografia è stata fatta dal Prof. F. Severi.**

Digitized by Google

iperellittiche, fu in questo medesimo ambito. Da notarsi in modo speciale le poderose e ponderose ricerche sui gruppi astratti, il cui ordine è la quinta potenza di un numero primo, nonchè i lavori attorno al difficile problema della classificazione dei gruppi finiti di omografie dello spazio ordinario. Egli giunse a classificare in modo completo tali gruppi nel caso di omografie reali e nel caso di gruppi (di omografie anche non reali) contenenti omologie. Eleganti applicazioni ne derivarono sia ai gruppi di movimenti reali dello spazio ellittico a 5 dimensioni, sia ai gruppi dei poliedri regolari dello spazio euclideo a 4 dimensioni. Molteplici e notevoli le configurazioni incontrate dal Bagnera nella sua classificazione: talune delle quali nuove e belle.

Nei lavori col De Franchis sopra le superficie iperellittiche e le funzioni abeliane di 2 argomenti, le concezioni gruppali si fondono con elevate questioni di Analisi e di Geometria algebrica. Si trattava di rispondere ad un tema posto a concorso nel 1906 dall'Accademia delle Scienze di Parigi. Gli autori non arrivarono in tempo a terminare la loro ricerca, sicchè l'Enriques ed il Severi, ai quali il premio fu assegnato, non li ebbero in quel concorso valorosi competitori. I risultati delle due coppie di autori su questo argomento, la cui trattazione ha avuto notevole influenza sugl'importanti progressi ulteriori, realizzati in Italia e fuori, nella teoria delle funzioni abeliane, hanno naturalmente taluni punti di contatto, ma nel complesso si completano mutuamente, dando luogo alla determinazione di tutti i possibili tipi di superficie rappresentabili parametricamente con funzioni abeliane di 2 variabili. Il Bagnera e il De Franchis ebbero, essi pure, posteriormente (1909) il premio Bordin dall'Accademia di Francia, per una Memoria in cui assegnarono la base delle curve di una superficie iperellittica, fornendo così un esempio di larga portata della determinazione effettiva di quella base, di cui il Severi nel 1905 avea dimostrato l'esistenza sopra una superficie qualunque.

Della lucidezza sottile colla quale il Bagnera sapeva cogliere il lato sostanziale dei problemi, riducendo di frequente ad una estrema semplicità dimostrazioni di teoremi noti, son saggi eloquenti due lavori brevissimi: uno relativo alle trascendenti intere e l'altro relativo ad un teorema di Pincherle-Borel, che s'incontra spesso nell'Analisi moderna. Di quest'ultimo teorema, nella

Digitized by Google

sua più generale accezione, Egli dà la dimostrazione in una mezza paginetta aurea!

Ma queste sue doti eminenti rifulgono ancor meglio nei Trattati (fra i quali uno classico di Analisi infinitesimale ed un altro, di fattura semplice e piana, di Algebra per le scuole medie) e nei corsi litografati. E non è a dire quante delle acute e talora sorprendenti osservazioni del Bagnera sieno andate perdute per la riluttanza ch'Egli aveva a scrivere; la quale lo costringeva persino a rifare più volte la fatica di organizzare lezioni di corsi superiori, non avendo Egli serbato traccia delle sue precedenti trattazioni. Noi possiamo perciò godere soltanto di una parte dei tesori del Suo intelletto: l'altra, la più cospicua, è perita con Lui, e niuno, che non lo abbia conosciuto, potrà mai, per quest'amara cagione, giudicare lo scienziato e l'uomo come chi lo conobbe e lo amò.

L'insegnante non poteva, con queste doti, non riescire chiaro, efficace e suggestivo: e tale Egli fu veramente. Uomo di alta coscienza, pieno di fervore per la sua missione, volle adempiere sino all'ultimo ai doveri suoi, lasciando ai discepoli e ai figli l'esempio di una nobile vita, tutta spesa per l'ideale della Scienza e addolcita da teneri affetti famigliari e da indissolubili vincoli di disinteressata amicizia.

355. ***Bianchi,*** *1856 - 1928.* — Luigi Bianchi nacque il 18 gennaio 1856 da Francesco Saverio Bianchi insigne giurista a Parma. Amò la Matematica dall'anno in cui al Ginnasio, seguendo le lezioni di Aritmetica razionale, cominciò ad apprezzare la potenza della deduzione logica. Avendo risoluto quindi di laurearsi in Matematica, concorse al posto di allievo nella Scuola Normale Superiore di Pisa; nel novembre 1873 lo ottenne riportando 40/40 all'esame di ammissione. A Pisa ebbe maestri insigni; e tutta la vita egli rimase devoto alla memoria del Betti e del Dini. La sua carriera scolastica fu naturalmente trionfale: il 30 novembre 1877 ebbe la laurea con la votazione massima e con un giudizio assai lusinghiero sulla sua tesi di laurea. A Pisa rimase poi due anni col posto di perfezionamento Lavagna; vi sostenne nel gennaio 1879 l'esame di abilitazione all'insegnamento con un'altra tesi che pure fu dichiarata degna di stampa. Ottenuto

Digitized by Google

poi per un biennio di posto di perfezionamento all'estero, frequentò le Università di Monaco e di Gottinga seguendo specialmente le lezioni del Klein.

Ritornò in Italia; ma ormai era diventato nell'animo, nell'educazione scientifica un cittadino pisano, un allievo della Scuola di Pisa; egli sentiva, come sentì tutta la vita, la grandezza delle tradizioni pisane, e non ebbe mai ambizione maggiore di quella di essere Maestro nell'Ateneo e nella Scuola di cui era stato discepolo.

A Pisa fu tosto nominato Professore nella Scuola Normale Superiore; e nel 1886 ebbe anche all'Università l'incarico della Geometria differenziale: scienza di cui si era cominciato ad occupare sin dalla tesi di laurea.

Nel dicembre 1886 fu nominato per concorso professore straordinario di Geometria proiettiva. Ed è curioso ricordare che il Cremona, con angustia di giudizio eccezionale in un uomo di così grande valore, sollevasse difficoltà, opponendo che al Bianchi mancava il lavoro specifico; ma anche la forma fu salvata da una noticina scritta dal Bianchi sotto l'influenza del Klein. Ma il Bianchi l'anno stesso aveva ottenuto anche la Cattedra di Geometria analitica che tenne poi per tutta la vita. Il 13 febbraio 1890 divenne ordinario; ebbe dal 1892 al 1919 e nel 1923-24 per incarico l'insegnamento delle Matematiche superiori, e dal 1919 al 1928 quello della Analisi superiore. Dal novembre 1918 fu direttore della Scuola Normale Superiore, ben degno successore del Betti, del D'Ancona, del Dini. Ebbe svariatissime onorificenze, tra cui massima quella di Commendatore dell'Ordine Civile di Savoia. Giovanissimo aveva vinto il Premio Reale di Matematica ai Lincei. Fu membro di moltissime Accademie italiane e straniere e del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione. Il Governo Nazionale, a riconoscimento delle sue benemerenze insigni, lo nominò Senatore del Regno.

Negli ultimi due anni la sua robusta fibra era minata da una albuminuria causata da un attacco di influenza; e soltanto allora fu rallentata la sua prodigiosa attività scientifica che durò ininterrotta quasi mezzo secolo. Dico rallentata e non spenta, perchè ancor oggi è in corso di stampa una sua lunga Memoria di Geometria differenziale, la cui redazione rallegrò gli ultimi

Digitized by Google

giorni della sua nobile esistenza, e che avrebbe letto al Congresso internazionale dei Matematici, che si tenne a Bologna nel settembre 1928. Attacchi nefritici e miocardici spensero il grande Maestro il 6 giugno 1928. Pisa gli diede degna sepoltura nel Camposanto Monumentale che raccoglie le salme dei suoi Cittadini più grandi.

Ebbe cinque figli; e tutta la sua vita fu dedicata alla Scuola, alla Famiglia e alla Scienza; non ebbe ambizioni, non cercò nulla fuori della Scuola e della Casa; modesto, affabile, mite, fu consigliere e incitatore amatissimo dei suoi discepoli. Raccolse, quasi senza saperlo, l'ammirazione e l'affetto devoto, non solo di colleghi e di scolari, ma anche quello della sua città adottiva, della sua Pisa che lo onorò e lo pianse come si piange il figlio prediletto, che con le virtù e con le opere si dimostrò tanto degno continuatore delle grandi tradizioni pisane!

Spirito caustico ed argutissimo; sapeva allietare la conversazione con frizzi, con osservazioni acute e sintetiche, che in poche parole ritraevano al vivo tanto una questione scientifica, quanto il carattere di un uomo; nè mai, discorrendo, faceva pesare sull'interlocutore la sua superiorità di uomo e di scienziato. Per dare un solo esempio della sua infinita modestia, voglio ricordare che, dopo aver assunto l'incarico della Analisi superiore, raccontava ad un suo discepolo che egli teneva quell'insegnamento soltanto, perchè la Facoltà non poteva in quel momento provvedere altrimenti; ma che egli non si sentiva degno di quella Cattedra, perchè troppo scarsa era la sua coltura. Egli solo era convinto di quanto diceva; noi, suoi discepoli, dalle conversazioni col Maestro, dalla lettura dei suoi numerosi Trattati, relativi ai campi più svariati della Matematica, sapevamo benissimo che pochi uomini potevano in Italia rivaleggiare con lui per ampiezza, profondità, varietà di dottrina.

Amò l'Italia con animo di Italiano; alla Patria avrebbe sacrificato sè stesso, la famiglia, ogni cosa. Ecco perchè la memoria di Luigi Bianchi vivrà nella mente di chi lo conobbe esempio luminoso di probità, di patriottismo, di devozione illimitata alla Scienza e alla Patria.

Dire degnamente quanto il Bianchi abbia lavorato, sia come espositore lucido e stringato nei suoi numerosi Trattati, sia come

Digitized by Google

scopritore di nuove vie, di nuovi indirizzi nella ricerca geometrica, non è certo opera di poco rilievo. Di questo argomento si occuperà più a lungo il prof. G. Fubini nel Bollettino di Matematica (1).

Molto notevoli sono i Trattati del Bianchi; in essi sono raccolte le sue Lezioni sulla teoria dei gruppi discontinui e dei gruppi continui, sulla teoria delle funzioni di variabile complessa ed ellittiche, sulla teoria dei numeri, sulla Geometria differenziale. In questi libri non si cerchino divagazioni o appelli alla intuizione: essi sono concepiti e redatti in modo preciso e rigoroso; lo scopo non è quello di indicare nuovi campi aperti alle ricerche future, ma di coordinare nel modo migliore i risultati già conseguiti senza trascurare nulla di quanto all'Autore sembri di importanza essenziale. Si è fatto perciò talvolta loro quasi il rimprovero di trascurare l'intuizione geometrica o analitica. Ma questo modo di apprezzare l'opera del Bianchi è del tutto infondata; pochi possedettero, al pari di lui, una intuizione insieme rapida e profonda, come ben hanno appreso i suoi discepoli dalle conversazioni col Maestro. Soltanto questo è vero: che, quando il fatto intuitivo gli sembrava appena appena in qualche lato manchevole, il Bianchi lo trascurava nella esposizione definitiva, dando il primo posto alla trattazione sistematica e completa in ogni particolare.

Nelle sue ricerche si occupò degli argomenti più svariati. Trascurando qui quelli di minor rilievo, come per es. gli studî sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine, sugli integrali ellittici, sulle possibili estensioni del metodo di Riemann, possiamo dire che la sua attività fu nella massima parte dedicata alla Teoria dei numeri e alla Geometria differenziale. Nella Teoria dei numeri studiò problemi relativi alle forme quadratiche ed Hermitiane, determinando anche i poliedri fondamentali di molti gruppi discontinui e trovando relazioni interessantissime tra il numero di certi vertici di tali poliedri e il numero delle classi di ideali del corpo aritmetico posto a base della ricerca. Nella Geometria differenziale aprì nuove vie alla indagine scientifica, che arricchirono di ampi Capitoli la teoria

(1) Vedi « Il Bollettino di Matematica », Agosto 1928. Fasc. III.

delle superficie, e degli spazi più generali. Aveva poca simpatia per l'uso degli immaginarî che di regola considerava più adatti alla Geometria algebrica che alla differenziale. Egli voleva *vedere* gli enti da lui studiati, e talvolta costriva persino modelli. Ecco perchè nei suoi libri si trova, per evitare l'uso dei numeri complessi, ripetuta, in varia forma due volte una medesima trattazione.

Due sono i principî essenzialmente nuovi delle sue ricerche: il primo è lo studio della Geometria non euclidea, non solo come fine a sè stessa, ma anche come metodo adatto alla scoperta di nuovi risultati nella Geometria euclidea. Egli trovò anche per primo tutte le Geometrie di Riemann, che ammettono un gruppo continuo di movimenti in sè stesse. Il secondo principio, intradotto dal Bianchi, è lo studio delle *trasformazioni* di una superficie in un senso ben distinto da quello abituale ai Geometri algebrici. Con questo metodo il Bianchi creò le teorie, oggi ormai classiche, relative alle superficie a curvatura costante, alle deformate delle quadriche, a taluni sistemi tripli ortogonali e tripli coniugati di superficie. La fecondità dell'idea di trasformazione nel modo concepito dal Bianchi, si dimostrò grandissima anche in altri Capitoli della Geometria differenziale: ricordo le trasformazioni di Darboux e del Bianchi stesso per le superficie isoterme, e tutti gli studî che, per opera di Eisenhart e di Tzitzeica, hanno permesso di organizzare queste ricerche da nuovi punti di vista e di collegarle anche più intimamente alla teoria delle equazioni differenziali. La teoria delle trasformazioni di tali equazioni, la teoria del problema di Bäklund, che tanti progressi ha fatto per opera dei Matematici francesi, non sarebbero sorte senza gli studî del Bianchi, che ne vide non solo la importanza geometrica, ma diede anche l'enunciato di problemi essenziali per l'Analisi pura.

Immensa è stata l'efficacia dell'insegnamento del Bianchi sui suoi discepoli: il primo impulso a gran parte dei lavori di questi proviene da lui. Con Luigi Bianchi si è spenta pertanto una delle menti più elette e più poderose che abbia avuta la Matematica nel nostro Paese, di cui si può ben dire che era il nostro Darboux.

Ecco l'elenco, non completo, delle pubblicazioni, tolto da J. C. Poggendorff, « Biographisch etc. », Bond V, 1904-1922:

Digitized by Google

1. *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, 1901).

2. *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, 1902-1909).

3. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Pisa, 1903).

4. *Lezioni di geometria analitica* (Pisa, 1908).

5. *Vortesgn. üb. differentiale-geometrie, übers. V. M. Lukot, 2 Auf* (Lipsia, 1910).

6. *Lezioni di geometria analitica* (Pisa, 1915).

7. Amer. Math. Geom. Trans.: *Concerning singular transformats of surfaces applicable to quadrining*, 23 S. (18, 1919).

8. Ann. di Matem. Brioschi: *Deformaz. dei paraboloidi*, 64, S. (9, 1904). — *Alcune classi di congruenze rettilinee negli spazi di curvat. cost.*, 52 S. (10, 1904). — *Superficie isoterme e deformazioni delle quadriche*, 66 e 36 S. (11 e 13, 1905 e 1906). — *Teoria delle trasform. delle superf. applicab. sui paraboloidi*, 84 S. (12, 1906). — *Una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche*, 68 S. — *Deform. isogonali delle superf. a curvat. cost. in geometria ellitt. e iperbol.*, 60 S. (18, 1911). — *Sistemi obliqui di Weingarten*, 80 S. (19, 1912). — *Sulle congruenze rettilinee W a parametro medio costante*, 64 S. (22, 1913-1914). — *Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di sperf. applicabili sopra quadriche*, 80 S. (23, 1914). — *Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali derivati per trasformaz. di Combescure dai sistemi a curv. cost.*, 52 S. (24, 1915). — *Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superf. ortogon.*, 76 S. (25, 1916). — *Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie di iperboloidi rotondi*, 26 S. (26, 1917). — *Le trasformaz. di Ribaucour dei sistemi dupli ortogon. ed il Teor. generale di permutabilità*, 76 S. (27, 1918). — Ulisse Dini, 2 S. — *Le trasformaz. di Ribaucour dei sistemi n.ali ortogon. e il teor. di permutabilità*, 48 S. (28, 1919).

9. Palermo, Circ. Matem. Rend.: *Deform. delle quadriche*, 20 S. (22, 1906). — *Configuraz. mobili di Möbius nelle trasform. asintet. delle curve e delle superf.*, 35 S. (25, 1908). — *Ricerche sul rotolamento di superficie applicabili*, 42 S. (38, 1914). — *Sulle congruenze rettilinee di rotolamento*, 53 S. (39, 1915). —

Digitized by Google

Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudo-sferiche, 42 S. (40, 1915).

10. Paris - Acad. C. R.: *La déformat. de quadriques*, 3 e 3 S. (142, 1906). — *Le couples des surfaces aà lignes de courbure associées*, 3 S. (190, 1920).

11. Paris - Acad. Mém. div. lav.: *Théorie de transformat. de surfaces applicables sur le quadriques générales*, 274 S. (34,1909).

12. Paris - Ecole normale Ann.: *Le syst. cycl. dont le plans envelopp. une sphère*, 10 S. (19, 1902).

13. Roma - Lincei, Rend.: *Simboli a 4 indici e curvatura di Riemann*, 5 S. — *Un probl. relativo alla teoria della formaz. delle superf.*, 12 S. — *Deformaz. delle superf. di rotaz.*, 4 S. (11, 1902). — *Quadriche coniugate in deformaz.*, 9 S. — *Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui finiti di trasmormazioni*, 10 S. — *Superficie a linee di curvat, isoterme*, 10 S. (12, 1903). — *Rappresentaz. equival. della sfera e le coppie di superficie applicab.*, 12 S. — *Coppie di superf. applicab. con assegnata rappresentaz. sfer.*, 15 S. — *Teor. di permutabilità per le trasformaz. di Dorboux delle superficie isoterme*, 9 S. — *Gruppi di proiettività*, 4 S. — *Equaz. di Montard con gruppi di soluz. quadrat.*, 12 S. (13, 1904). — *Superficie deformate*, 5 S. — *Deformaz. di paraboloidi*, 8 S. (14, 1905). — *Deformaz. delle superf. applicate sulle quadriche*, 10 S. (16, 1909). — *Sul termine* r *di Kimura nella variaz. delle latitudini*, 5 S. — *Un caso limite delle trasformaz. delle superf. applicabili sulle quadriche*, 7 S. — *Gruppi di sostituz. lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non-euclideo in tetraedri ed ottaedri regolari*, 8 S. (18, 1909). — *Una estensione di un teor. di Lindelöf nel calcolo delle variaz.*, 6 S. — *Una proprietà caratteristica delle superf. rigate applivat. sul catenoide*, 9 S. (19, 1910). — *Formule ind. di T. Weingarten con applicaz.*, 19 S. — *Trasformazione di Guichard delle superf. applicab. sulle quadriche*, 6 S. (20, 1911). — *Gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero*, 11 S. — *Superficie minime cerchiate di Riemann*, 11 S. — *Certi sistemi di superf. pseudo-sfer. collegati ai sistemi di Weingarten*, 10 S. — *Una nuova classe di superf.*, 15 S. (21, 1912). — *Formule generali per le superf. riferite alle loro linee assintotiche*, 9 S. — *Superficie con*

Digitized by Google

un sistema di assintotiche a torsione cost. e loro trasform., 12 S. — *Sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche*, 8 S. (22, 1913). — *Rotolamento di superficie applicab.*, 9 S. — *D.° in geom. elittica ed iperbol.*, 14 S. — *Superficie applicabili e sistemi tripli ortogon.*, 12 S. — *Sistemi tripli coniugati con una famiglia di superf. applicab. sopra quadriche*, 10 S. (23, 1914).

14. Soc. Ital. di Sc. mat. e fis., Mem.: *Sulle varietà a tre dimensioni deformate entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, 54 S. (13, 1915).

15. Torino - Accad. Att.: *Superficie applicab. sui paraboloidi ed alle loro trasformaz*, 20 S. — *Gruppi continui finiti di trasfor. che conservano le aree ed i volumi*, 16 S. — *Gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali* 15 S. (38, 1903). — *Sulla trasformazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico*, 22 S. (39, 1903-1904). — *Deformaz. delle superficie flessibili ed inestensibili*, 18 S. (40, 1905).

Gli storici della Matematica.

356. ***Cossali.*** — L'abbate Cossali nacque a Verona nel 1768 e morì a Padova nel 1815. Fu professore a Verona (1788), alla Università di Padova di Fisica, Mineralogia, Idraulica ed Astronomia (1808); era della Società italiana di scienze e dei XL (1811). La principale delle sue opere è la « *Storia critica dell'origine e primi progressi in Italia dell'Algebra* », opera assai pregevole da potere essere utilmente consultata anche oggidì.

Il Cossali ha inoltre pubblicato una diecina di lavori di Matematica.

357. ***Venturi.*** — Giambattista Venturi nacque a Ribiano (vicino a Reggio d'Emilia) nel 1746, e vi morì nel 1822. Ebbe a Reggio a maestro lo Spallanzani, sotto il quale fece tali progressi che solo a 23 anni ottenne la Cattedra in quel seminario di Metafisica e Matematica. Nel 1773 passò a Modena come professore di Filosofia. Nel 1796 andò a Parigi con una missione politica. Sono ricordati tuttora con onore come importanti lavori storici:

Digitized by Google

1. *Commentari sopra la storia e la teoria dell'Ottica* (Bologna, 1814); ivi il *Traguardo* di Erone.

2. *Memorie e lettere inedite di Galileo Galilei* (Modena, 1818).

3. *Saggio sulle opere fisico-matematiche di Leonardo da Vinci* (Parigi, 1797), recentemente ristampato da M. Cermenati, come lo scritto che inizia gli studî di Leonardo quale scienziato.

358. ***Libri.*** — Guglielmo Bruto Icilio Timoleone Libri-Carucci dei conti della Somaglia nacque a Firenze nel 1803, e morì nella villa Vannini, ora Facelli, presso Fiesole, nel 1869. Fece gli studî secondarî in Firenze, e quelli universitari a Pisa. Nel 1820 pubblicò la sua prima *Memoria di matematiche*, che richiamò anche l'attenzione del Cauchy. A 20 anni egli fu nominato professore di Fisico-matematica (1823) all'Università di Pisa; allora cadde gravemente malato; ma il Granduca per la immensa stima che gli aveva nominò il Libri professore emerito, e stipendiato di detta Università. Egli si dedicò allora con maggior lena allo studio delle Matematiche, e nel 1844 pubblicò nel « Recueil des savants étrangers » due Memorie, che furon lodate dal Fourier.

Nel 1825 il Libri si recò a Parigi, ove fu accolto con gran deferenza da quegli scienziati e dall'alta società, riconoscendo in lui il Matematico insigne.

Fu bibliofilo profondo, ed appassionatissimo di raccogliere libri e manoscritti; e pur troppo fu vittima di questa sua passione, chè fu condannato, ma ingiustamente, lui contumace, a 10 anni di reclusione, accusato di aver rubato dei manoscritti celebri nelle diverse biblioteche di Francia, che era stato incaricato d'ispezionare.

Fin dal 1829 incominciò ad occuparsi della storia delle scienze nel medioevo, e fece uno studio particolare sui manoscritti di Leonardo da Vinci. Il Libri era un grande patriota; fu esiliato di Toscana e gli furono confiscati i beni; si rifugiò in Francia; e nel 1833 si fece cittadino francese; e nello stesso anno fu nominato Membro dell'Accademia dell'Istituto delle scienze di Francia al posto di Legendre; e dalla Facoltà delle scienze fu nominato professore di Calcolo delle probabilità; poi al Collegio di Francia supplì gratuitamente il Lacroix.

Il Libri possedeva una biblioteca di 30 mila volumi e 4 mila

Digitized by Google

manoscritti, il tutto valutato 700 mila lire. Si sa che molti libri rari e codici furono da lui regalati alla biblioteca Mazarino di Parigi e ad altre biblioteche di Francia.

Il Libri oltre essere un valente Matematico, era anche un profondo cultore della Storia delle Matematiche; la sua *Histoire des sciences mathématique en Italie*, in 4 volumi (Parigi, 1839) è un'opera classica (disgraziatamente incompleta). Il Libri ha lasciato circa 30 Memorie di Matematica.

359. ***Boncompagni.*** — Baldassarre Boncompagni Ludovisi dei Principi di Piombino nacque a Roma il 1821 e vi morì il 1894. Studiò lettere sotto l'abate Santucci, Fisica ed Astronomia coll'abate Calandrelli, Matematiche col Tortolini. Ma sino da principio il Boncompagni dimostrò una particolare propensione per le ricerche storiche, di cui egli diede un primo saggio nel 1846 colla Memoria « *Intorno ad alcuni avanzamenti della Fisica in Italia nei secoli XVI e XVII* ».

Nel 1847 fu fra i trenta chiamati dal papa Pio IX a comporre l'Accademia pontificia dei nuovi Lincei. Si mantenne dopo il 1870 sempre fedele al papa; non volle prender parte ai lavori della nuova Accademia, chiamata anch'essa dei Lincei, che fu fondata dopo il 1870 in Roma dal governo italiano; e rifiutò anche l'offerta di un seggio nel Senato del Regno, fattagli da Quintino Sella.

Essendo il Boncompagni ricchissimo, fondò nel 1868 a proprie spese il « *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche* », che distribuiva gratis, a tutte le Biblioteche ed Istituti scientifici; e perchè poi riuscisse una tale pubblicazione perfetta, fondò anche una tipografia matematica. Di questo Bollettino uscirono 20 volumi; ne cessò la pubblicazione nel 1888. Questa importantissima e dispendiosa pubblicazione del Boncompagni rese un gran servizio alla storia delle scienze ed alla coltura matematica; con essa si iniziò la vera ricerca e critica storica, fondata su criteri scientifici; e ben tosto il *Bollettino* del Boncompagni si acquistò gran fama in tutto il mondo scientifico.

Il Boncompagni si era formata una ricchissima biblioteca matematica, forse la più ricca d'Europa; possedeva 20 mila volumi e 600 manoscritti; si dice che egli vi abbia speso non meno di

Digitized by Google

20 milioni di lire! Pur troppo, dopo la sua morte, un sì prezioso tesoro scientifico andò disperso per causa principalmente del Municipio di Roma.

Il principe Boncompagni, oltre essere un valentissimo bibliofilo e cultore della storia delle scienze matematiche e fisiche, si occupava anche di Analisi, come lo provano le sue 30 e più pubblicazioni su questo ramo delle Matematiche superiori.

Il Boncompagni era di animo mitissimo, semplice ne' modi, non curante delle forme esteriori, tanto che era persino troppo negletto nel vestire, non addicentesi certo alla sua alta posizione sociale; ma egli teneva più all'abito scientifico ed ai suoi diletti studî che alle apparenze esteriori; era caritatevolissimo; e davvero questo mecenate moderno ha saputo spendere ben saggiamente le sue ricchezze!

360. ***Riccardi.*** — Pietro Riccardi nacque a Modena nel 1828 e vi morì nel 1898. Nel 1848 si laureò in Matematica a Bologna; fu nominato l'anno stesso luogotenente nel corpo del genio; nel 1851 si laureò ingegnere architetto ed idraulico; nel 1859 fu nominato professore di Geodesia nella Università di Modena; e nel 1873 professore di Geometria pratica nello Istituto tecnico della stessa città; e nel 1887 professore della stessa materia nella Scuola degl'Ingegneri di Bologna.

Dal padre, che era professore di Matematica nella Università di Bologna, il Riccardi ereditò una ricchissima biblioteca, che fu base fondamentale dei suoi lavori bibliografici.

Fra questi il principale è la « *Biblioteca matematica italiana* », esteso a tutto il secolo XVIII, cui dedicò ben 25 anni di studî indefessi. Essa comprende le indicazioni, seguite il più delle volte da brevi e chiari commenti, di 8083 opere di 2310 autori: questo lavoro è interessantissimo e per la mole e per la grande acutezza, onde fu compilato.

Un altro lavoro importante è la « *Storia della Geodesia in Italia* », iniziato nel 1865 e condotto a termine solo nel 1889. Essa può essere letta con utilità e diletto anche oggidì, essendo anche scritta in uno stile severo e castigato.

Il Riccardi deve annoverarsi fra i più benemeriti scrittori di bibliografia e di storia delle Matematiche; ed i suoi lavori, oltre

Digitized by Google

una ventina, di certo hanno reso un gran servigio alla storia ed alle scienze matematiche.

361. ***Favaro.*** — Antonio Favaro nacque a Padova nel 1847 da nobile famiglia e vi morì il 1922. Compiuti nel 1865 gli studî secondarî a Padova, per consiglio del poeta G. Zanella, s'inscrisse in quella Facoltà matematica, d'onde poi passò alla Scuola di applicazione degli ingegneri di Torino, ove nel 1869 conseguì il diploma d'ingegnere. Fu assistente del Turazza alla Cattedra di Meccanica razionale. Nel 1872 fu nominato professore di statica grafica, di cui scrisse un Trattato, che fu molto apprezzato anche all'Estero.

Quando si ritirò il Minich dall'insegnamento, per 4 anni egli lo sostituì nella cattedra di Calcolo infinitesimale, iniziando in pari tempo un corso libero sulla Storia delle ricerche storiche; si occupò delle vicissitudini della Università di Padova, e così fu tratto ad occuparsi del tema che doveva assorbire la massima parte della sua attività: *Galileo Galilei.* Essendosi convinto che questo sommo scienziato era più nominato che effettivamente conosciuto, si fece promotore di un'edizione nazionale critica, veramente completa delle sue opere; ed ebbe la soddisfazione di potere dare in luce, nel ventennio 1890-1909, i venti splendidi volumi che la formano. Col titolo « *Quarant'anni di studî galileiani* » il Favaro nel 1915 ha reso conto delle vaste ricerche da lui compiute per illustrare l'opera e l'ambiente in cui visse il celebre fisico pisano.

Il Favaro, oltre l'essersi occupato del creatore del metodo sperimentale, ha pubblicato numerosi lavori sulla storia della Università di Padova, e negli ultimi anni di sua vita volse precipuamente la sua attenzione su Leonardo da Vinci, portando così un contributo di somma importanza ai lavori preparatori della edizione completa dei Manoscritti di Leonardo da Vinci, che si va facendo a spese dello Stato.

Il Favaro era insignito di numerosi ordini cavallereschi e membro di molte Accademie ecc.

Digitized by Google

APPENDICE II.ª

Sui tre celebri problemi geometrici dell'antichità.

362. Fra i più interessanti problemi geometrici dell'antichità vi sono tre questioni, che richiamarono la particolare attenzione dei primi Matematici della Grecia. Le nostre cognizioni di geometria sono state attinte da fonti greche; onde tali questioni sono divenute classiche nella storia delle Matematiche. Esse sono:

I. La duplicazione del cubo, cioè la determinazione dello spigolo di un cubo, di cui il volume sia doppio di quello di un cubo dato.

II. La trisezione dell'angolo (qualunque).

III. La quadratura del cerchio, cioè la determinazione di un quadrato, di cui l'area sia eguale a quella di un circolo dato.

363. Per risolvere ciascuno di questi problemi con una costruzione geometrica si deve fare uso solo di rette e di cerchi, cioè come suol dirsi della geometria euclidea che dispone solo della riga e del compasso. Con questa restrizione tutti questi tre problemi sono insolubili. Per duplicare un cubo di spigolo a è necessario di trovare un segmento rettilineo x tale, che sia: $x^3 = 2\,a^3$. Per trisecare un angolo dato possiamo trovare il seno dell'angolo, che indico con α; quindi se x è il seno dell'angolo eguale

Digitized by Google

ad un terzo di quello dato, avremo mediante la formula trigonometrica:

$$sen\ 3\alpha = 3\ sen\,\alpha - 4\ sen^3\alpha,$$

l'equazione:

$$a = 3\,x - 4\,x^3.$$

Onde i due primi problemi, considerati analiticamente, richiedono la risoluzione di un'equazione cubica; e poichè ogni costruzione ottenuta mediante cerchi, le cui equazioni sono della forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

e mediante rette, le cui equazioni sono della forma:

$$\alpha\,x + \beta y + \nu = 0,$$

non può equivalere alla risoluzione di un'equazione cubica; onde se ne inferisce che i problemi suddetti sono irrisolvibili, se nelle nostre costruzioni non possiamo disporre che di cerchi e di rette. Però se possiamo disporre delle sezioni coniche, entrambe le questioni si possono risolvere in parecchi modi. Il terzo problema è di specie diversa rispetto agli altri due, ma colla stessa restrizione esso pure è insolubile.

364. I. ***La duplicazione del cubo.*** — Il problema *della duplicazione del cubo* fu noto agli antichi come problema di Delo, a causa della leggenda che conta che i Deliani interrogassero in proposito Platone.

In una storia di questo problema, scritta da Philoponus, si dice che gli Ateniesi nel 430 a. C., allorchè furono flagellati dalla pestilenza della febbre tifoide eruttiva, consultarono l'oracolo di Delo per sapere come avrebbero potuto farla cessare. Apollo rispose che dovevano duplicare la base del suo altare, che aveva la forma di cubo. Agli ignoranti, che supplicavano nulla parve di più facile, e fu costruito un nuovo altare avente i suoi spigoli doppi di quelli dell'altro, quindi esso aveva un volume otto volte

Digitized by Google

maggiore, e posero un simile altare vicino all'antico. Allora, secondo la leggenda, il Dio indignato fece infierire più di prima la peste, ed informò la nuova deputazione, che era proprio inutile burlarsi di lui, siccome il nuovo altare doveva essere un cubo ed avere un volume precisamente doppio di quello del suo antico. Dubitando che fosse un mistero, gli Ateniesi ricorsero a Platone, che si rivolgesse ai geometri. Il mescolare in questa leggenda il nome di Platone è un ovvio anacronismo. Eratostene racconta intorno ad essa qualche cosa di consimile, ma aggiunge che Minos propose il problema.

365. In un'opera araba la leggenda greca fu trasformata in questo straordinario passo impossibile di storia, che citiamo per semplice curiosità. « Come nei giorni di Platone », dice lo scrittore, « la pestilenza scoppiò fra i figli d'Israele. Allorchè venne una voce dal cielo ad uno dei loro profeti, dicendo: « Fate in modo che l'altare cubico sia duplicato e la peste cesserà ». Così il popolo fece un altro altare simile al primo e collocò il medesimo al suo fianco. Nonpertanto la peste continuò ad aumentare. Ed ancora la voce parlò al profeta dicendo: « Essi hanno fatto un secondo altare simile al primo, e l'hanno posto al suo fianco, ma non hanno fatto la duplicazione del cubo ». Allorchè essi ricorsero a Platone, il saggio greco parlò a loro dicendo: « Voi avete trascurato la geometria, e perciò il sommo Nume vi punì, poichè la geometria è la più sublime di tutte le scienze ». Ora, la duplicazione di un cubo si fonda su un problema assai difficile di geometria, cioè... ». E poi segue la soluzione di Apollonio, che ora diamo.

366. Se a è la lunghezza dello spigolo del cubo dato ed x quella del cubo richiesto, abbiamo:

$$x^3 = 2\ a^3,$$

cioè:

$$x : a = \sqrt[3]{2} : 1.$$

Digitized by Google

È probabile che i Greci si siano accorti che l'ultimo rapporto è incommensurabile, in altre parole che non esiste il rapporto di due N_1, che sia uguale a quello di $\sqrt[3]{2} : 1$; perciò non ne consegue che non si possa di essi trovare il rapporto geometrico; infatti il lato e la diagonale di un quadrato sono per esempio due segmenti rettilinei, le cui misure sono incommensurabili.

Ora daremo le soluzioni geometriche della duplicazione del cubo ottenute mediante le sezioni coniche.

367. Ippocrate (circa 420 a. C.) fu forse il primo matematico, che abbia fatto qualche progresso nel risolvere questo problema. Egli non diede una costruzione geometrica, ma ridusse la questione a quella di trovare due medie geometriche fra il segmento rettilineo a ed il suo doppio $2a$. Se tali medie sono x ed y abbiamo:

$$a : x = x : y = y : 2a;$$

da cui ne consegue:

$$x^3 = 2a^3.$$

Ed ora si presenta un tal problema sotto questa forma. Per lo addietro si chiamava *mesolabio* ogni procedimento di soluzione per trovare queste medie.

368. Una delle prime soluzioni del problema fu quella data da Archita nel 400 a. C. o circa quell'epoca. La sua costruzione è la seguente: Sul diametro OA della base di un cilindro circolare retto si descrive un semi-cerchio, il cui piano sia perpendicolare alla base del cilindro. Il piano contenente questo semicerchio ruoti intorno alla generatrice che passa per O; quindi la superficie generata dal semi-cerchio taglierà il cilindro in una curva storta. Si taglierà questa stessa curva con un cono retto, il cui asse sia OA e l'angolo semi-verticale sia di 60°, in un punto P in modo, che la proiezione di OP sulla base del cilindro starà al raggio del cilindro nel rapporto dello spigolo del

Digitized by Google

cubo richiesto a quello del cubo dato. Necessariamente la dimostrazione data da Archita è geometrica; ed è interessante di far notare che da essa si vede come le proposizioni 18 e 25 del III libro e la 12 del XI libro di Euclide gli fossero assai famigliari. Per mostrare analiticamente che questa costruzione è giusta, si prenda OA per asse delle x, *e* la generatrice condotta per O come asse delle z, quindi colla notazione ordinaria in coordinate polari, se a è il raggio del cilindro, abbiamo per equazione della superficie descritta dal semi-cerchio:

$$r = 2\, a\, sen\, \theta;$$

per quella del cilindro:

$$r\, sen\, \theta = 2\, a\, cos\, \varphi$$

e per quella del cono:

$$sen\, \theta\, cos\, \varphi = \frac{1}{2}.$$

Queste tre superficie si tagliano in un punto tale che è:

$$sen^3\, \theta = \frac{1}{2};$$

quindi:

$$(r\, sen\, \theta)^3 = 2\, a^3.$$

Onde il volume del cubo, il cui spigolo è $r\, sen\, \theta$, è due volte quello del cubo di spigolo a.

369. La costruzione attribuita a Platone (circa 360 a. C.) si fonda su questo teorema: Se CAB e DAB sono due triangoli rettangoli aventi un cateto AB comune, gli altri due cateti AD e BC paralleli, e le loro ipotenuse AC e BD perpendicolari fra loro, quindi se queste ipotenuse si tagliano in P, abbiamo:

$$PC : PB = PB : PA = PA : PD.$$

Digitized by Google

Onde se questa figura si può costruire, facendo PD = 2PC, allora il problema sarà risolto. È facile costruire un istrumento, col quale si possa tracciare la figura.

370. Un altro scrittore, il cui nome è legato a questo problema è Menecmo, che nel 380 a. C. o circa a quest'epoca, ne diede due soluzioni.

Nella prima di esse osservò che due parabole aventi i vertici in comune, gli assi perpendicolari fra loro, e tali che il parametro dell'una sia doppio di quello dell'altra, si intersecheranno in un altro punto, la cui ascissa (o ordinata) darà una soluzione. Coll'analisi ciò è facilissimo: infatti se l'equazione delle parabole sono $y^2 = 2\,ax$ ed $x^2 = ay$, esse s'intersecano in un punto, la cui ascissa è data da $x^3 = 2\,a^3$. È probabile che questo metodo sia stato suggerito dalla forma in cui Ippocrate l'aveva messo, cioè di trovare x ed y così che $a : x = x : y = y : 2\,a$; quindi si ricava:

$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad y^2 = 2\,ax.$$

La seconda soluzione data da Menecmo è la seguente. Descrive una parabola di parametro l; quindi descrive una iperbola retta, avente l'asse reale la lunghezza $4\,l$, ed avendo per assintoti la tangente al vertice della parabola e l'asse della parabola. Onde l'ordinata e l'ascissa del punto d'intersezione di queste curve sono le medie proporzionali fra l e $2\,l$. Ciò si ottiene subito coll'analisi; le curve sono:

$$x^3 = ly \quad \text{e} \quad xy = 2\,l^2\,;$$

queste si segano in un punto determinato da $x^3 = 2\,l^3$ e $y^3 = 4\,l^3$. Onde:

$$l : x = x : y = y : 2\,l.$$

371. La soluzione di Apollonio, che fu data circa il 220 a. C., è la seguente. Il problema consiste nel trovare due medie proporzionali fra due rette date. Si costruisce un rettangolo OADB,

Digitized by Google

i cui lati adiacenti OA ed OB sono rispettivamente eguali alle due rette date. Biseco M in C; faccio centro in C e descrivo un cerchio che tagli OA prolungata in a, e tagli OB prolungata in b, così che aDb sarà una linea retta. Se questo cerchio può essere così descritto, ne seguirà:

$$OA : Bb = Bb : Aa = Aa : OB.$$

cioè Bb ed Aa sono le due medie proporzionali fra OA ed OB. È impossibile di costruire il cerchio colla geometria euclidea; ma Apollonio diede un metodo meccanico per descriverlo.

372. La sola altra costruzione dell'antichità, che possiamo qui riportare, è quella data da Diocle e Sporus. Essa è la seguente: Si prendano i due lati di un rettangolo OA, OB eguali alle due rette, fra le quali si cercano le due medie; sia OA la maggiore. Col centro O e raggio OA si descriva un cerchio; si prolunghi OB a segare la circonferenza in C, quindi FE = EG. Se si può trovare E, allora OE è la prima delle medie fra OA ed OB. Diocle inventò la cissoide per determinare E; ma esso può essere trovato egualmente coll'uso conveniente delle coniche.

In epoca più recente parecchie altre soluzioni sono state date; si possono ricordare di sfuggita le tre date da Huygens; ma enunceremo solo quelle proposte rispettivamente da Vieta, Descartes, Gregory di St. Vincent e Newton.

373. La costruzione di Vieta è la seguente. Si descriva un cerchio col centro in O, il cui raggio sia uguale alla metà della lunghezza della maggiore delle due rette date. In esso si conduca una corda AB eguale alla minore delle due rette date. Si prolunghi AB in E in modo che sia BE = AB. Per A si conduca AF parallela ad OE. Per O si conduca la retta DOCFG che tagli la circonferenza in D e C, che incontri AF in F e tagli BA prolungata in G in modo, che sia FG = OA. Se si può condurre questa retta, allora

$$AB : GC = GC : GA = GA : CD.$$

Digitized by Google

374. Descartes fece vedere che le curve $x = ay$ e $x^2 + y^2 = ay + bx$ si tagliano in un punto (x, y) tale che $a : x = x : y = y : b$. Naturalmente ciò equivale alla prima soluzione data da Menecmo; ma Descartes preferì l'uso di un cerchio invece di una seconda conica.

375. La costruzione di Gregory fu data in forma del teorema seguente: « L'iperbola, condotta pel punto d'intersezione di due lati di un rettangolo in modo da avere gli altri due lati per suoi assintoti, taglia il cerchio circoscritto al rettangolo in un punto, le cui distanze dagli assintoti sono le medie proporzionali fra due lati adiacenti del rettangolo ». Questa è l'espressione geometrica della proposizione che le curve $xy = ab$ ed $x^2 + y^2 = ay + bx$ si tagliano in un punto tale che: $a : x = x : y = y : b$.

376. Una delle costruzioni proposte da Newton è la seguente: « Sia OA la maggiore di due rette date. Biseco OA in B. Con centro in O e raggio OB si descriva un cerchio. Si prenda un punto C sulla circonferenza in modo che BC sia eguale all'altra delle due rette date. Da O conduco ODE, che taglia AC prolungata in D, e BC prolungata in E in modo, che l'intercetta DE sia ò uguale a OB. Allora:

$$BC : OD = OD : CE = CE : OE ».$$

377. II. ***La trisezione di un angolo***. — La trisezione di un angolo è il secondo di questi problemi classici, ma esso non ha conservato la sua origine di favola. Le due costruzioni seguenti sono le più antiche e le più note fra quelle, che sono state date; esse sono citate da Pappo, ma non si sa a chi in origine siano dovute.

La prima di esse è la seguente: « Sia $\widehat{AOB}$ l'angolo dato. Da un punto P di OB conduco PM perpendicolare ad OA. Per P conduco PR parallela ad OA. Su MP prendo un punto Q in modo, che se OQ è prolungata a tagliare PR in R, allora è QR = 2.OP. Se questa costruzione può farsi allora $\widehat{AOR} = \frac{1}{3} \widehat{AOB}$ ». La soluzione dipende dal determinare la posizione di R. Ciò fu fatto

Digitized by Google

mediante una costruzione che può essere espressa analiticamente così: Sia l'angolo dato da $tan^{-1} \frac{b}{a}$. Si costruisca l'iperbole $xy = ab$ ed il cerchio $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4 (a^2 + b^2)$. Sia x l'ascissa, che è la maggiore, dei due punti, ove esse s'intersecano; allora:

$$PR = x - a \text{ e } tan^{-1} \frac{b}{x} = \frac{1}{3} tan^{-1} \frac{b}{a}.$$

378. La seconda costruzione è la seguente: « Sia $\widehat{AOB}$ l'angolo dato. Prendo OB = OA e col centro O e raggio OA descrivo un cerchio. Prolungo OA indefinitamente e prendo un punto C su di essa esterno al cerchio in modo, che se CB taglia la circonferenza in D, allora CD sarà eguale ad OA. Conduco OE parallela a CDB. Quindi se questa costruzione si può fare $\widehat{AOT} = \frac{1}{3} \widehat{AOB}$ ». Gli antichi determinarono la posizione del punto C coll'aiuto della concoide; si troverà pure colle sezioni coniche.

379. Ora daremo altre soluzioni, in cui sono state adoperate le sezioni coniche.

Fra le altre costruzioni date da Pappo ricorderemo le seguente: « Si descriva un'iperbole, la cui eccentricità è 2; il suo centro sia C ed i suoi vertici A e A'. Prolungo CA' in S in modo che A'S = CA'. Su AS descrivo un segmento di cerchio, che sia capace dell'angolo dato. La mediatrice di AS tagli il segmento in O; col centro O e raggio OA od OS descrivo un cerchio. Questo cerchio tagli il ramo dell'iperbole passante per A' in P. Allora

$$\widehat{SOP} = \frac{1}{3} \widehat{SAO} \text{ ».}$$

380. In epoca più recente una delle prime soluzioni coll'uso diretto delle coniche fu data da Descartes, che l'eseguì mediante l'intersezione di un cerchio ed una parabola. La sua costruzione equivale a trovare i punti d'intersezione, oltre l'origine, della parabola $y^2 = \frac{1}{4} x$ e del cerchio $x^2 + y^2 - \frac{13}{4} x + 4\, ay =$

Digitized by Google

$= 0$. Le ordinate di questi punti sono dati dall' equazione $4\,y^3 = 3\,y - a$. La minore delle radici positive è il seno di un terzo dell'angolo, il cui seno è a ». La dimostrazione è ingegnosa.

381. Una delle soluzioni proposte da Newton è in sostanza equivalente alla terza di Pappo riportata sopra. Eccola: « Sia A il vertice di un ramo dell'iperbole, la cui eccentricità è 2, e sia S il foco dell'altro ramo. Su AS descrivo il segmento di un cerchio capace di un angolo eguale al supplemento dell'angolo dato. Questo cerchio tagli il ramo, che passa per S, in P. Allora $\widehat{PAS}$ sarà eguale ad un terzo dell'angolo dato ».

382. La soluzione seguente, assai elegante, è dovuta a Clairaut. « Sia $\widehat{AOB}$ l'angolo dato; prendo $OA = OB$ e col centro in O e raggio OA descrivo un cerchio. Congiungo A con B, e triseco in H e K la AB, così è $AH = HK = KB$. Biseco l'angolo $\widehat{ABO}$ colla OC, che taglia AB in L. Allora $AH = 2\,HL$. Col foco A, vertice H e direttrice OC, descrivo un'iperbole. Il ramo di questa iperbole, che passa per H, tagli il cerchio in P. Conduco PM perpendicolare ad OC e la prolungo a tagliare il cerchio in Q. Quindi dalle proprietà del foco e della direttrice abbiamo:

$$AP : PM = AH : HL = 2 : 1\,;$$

onde:

$$AP = 2\,.\,PM = PQ.$$

Quindi per simmetria:

$$AP = PQ = QR\,;$$

onde:

$$\widehat{AOP} = \widehat{POQ} = \widehat{QOR} \text{ ».}$$

383. Termineremo dando la soluzione di Chasles, che egli riguardò come la più importante. Essa equivale alla proposizione

Digitized by Google

seguente: « Se OA ed OB sono i raggi, che determinano l'arco AB di un cerchio, allora l'iperbole retta, che ha OA per diametro e che passa pel punto d'intersezione di OB colla tangente al cerchio in A, passerà per uno dei due punti di trisezione dell'arco ».

384. III. ***La quadratura del cerchio.*** — Scopo del terzo di questi tre classici problemi fu di « *Determinare il lato di un quadrato, la cui area sia eguale a quella di un circolo dato* ».

Le ricerche, prima degli ultimi due secoli, su questo problema, furono feconde di scoperte di importanti teoremi; ma da poco è stato trattato da un punto di vista ben diverso, tenendo conto di ciò che si può ottenere coi mezzi di cui si può disporre. La storia di questo importante soggetto è stata trattata diffusamente da competentissimi autori; ma qui ne discorreremo assai brevemente.

385. Archimede fece vedere (ciò probabilmente era noto prima) che il problema equivaleva a trovare l'area di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono eguali rispettivamente alla circonferenza del cerchio ed al raggio di esso. La metà del rapporto di questi segmenti rettilinei è un numero, che ordinariamente si denota con π. La irrazionalità di esso era da tempo sospettata, ed è stata ora dimostrata. La prima dimostrazione analitica di ciò è stata data da Lambert nel 1761; nel 1803 Legendre dimostrò che anche π^2 è irrazionale.

386. Nel 1882 il Lindemann nei *Mathematische Annalen*, Lipsia 1882, vol. XX p. 213-225 nella sua Memoria « *Eeber die Zahl* π » dimostrò la trascendenza di π. Noi qui ne daremo un rapido cenno. Giorgio Cantor ha dimostrato che esistono due specie di aggregati infiniti di numeri: 1° *Gli aggregati numerabili*, le cui quantità possono essere *enumerate* in modo, che a ciascuna quantità od elemento sia assegnato un posto determinato del sistema; 2° *Gli aggregati non enumerabili*, in cui ciò non si può fare. Alla prima specie appartengono non solo i numeri

Digitized by Google

razionali, ma ancora i numeri detti algebrici, vale a dire tutti i numeri definiti da un'equazione algebrica:

$$a_0 + a_1, x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

a coefficienti intieri, ove n è un numero intero e positivo.

Un esempio di un *aggregato numerabile* si ha nella totalità dei numeri contenuti in un *continuo* come quello formato da tutti i punti di un segmento rettilineo. Questo continuo non solo contiene i numeri razionali ed algebrici, ma ancora dei numeri, che si chiamano *trascendenti*. L'esistenza effettiva dei numeri trascendenti, che deriva naturalmente dalla teoria degli aggregati di *Cantor*, era stata dimostrata precedentemente da Liouville mediante le frazioni continue. Però la dimostrazione di questa esistenza non ha ancora fornito alcun mezzo, il quale permetta di decidere se un numero particolare è *trascendente* o no. Ma in questi ultimi anni è stato stabilito, che i due numeri fondamentali nelle matematiche e e π sono numeri trascendenti.

Qui analizzeremo brevemente la dimostrazione semplicissima data da Hilbert della trascendenza di questi due numeri.

387. La storia del problema è breve: Nel 1873 Carlo Hermite pel primo dimostrò la trascendenza di e; fece vedere con metodi assai difficili, che questo numero non può essere radice di una equazione algebrica a coefficienti intieri. Nove anni di poi (1882) Lindemann, prendendo le mosse dagli sviluppi di Hermite, riuscì infine a dimostrare la trascendenza di π. Il suo lavoro fu ripreso e verificato da Weierstrass.

Le dimostrazioni della trascendenza di e e π faranno epoca nelle Matematiche. L'ultima poi dà una risposta definitiva al problema della quadratura del cerchio, e decide la questione senza alcun appello. Infatti il problema della quadratura del cerchio esige che si possa determinare π mediante un numero finito di costruzioni geometriche elementari, vale a dire impiegando solo la riga ed il compasso. Siccome una retta ed un cerchio ovvero due cerchi fra loro non s'intersecano che in due punti, essi possono essere espressi algebricamente sotto una forma relativamente semplice. Risolvere il problema della quadra-

Digitized by Google

tura del cerchio equivale dunque a dire, che il numero π può esprimersi come radice di un'equazione algebrica di natura semplice, cioè per essere più esatti di un'equazione risolubile per radicali quadratici. Ora la dimostrazione di Lindemann prova, che π non è radice di nessuna equazione algebrica.

388. La dimostrazione di Hilbert è stata data nelle *Gottinger Nachrichten*, 1893, v. 12, pag. 113. Subito dopo Adolfo Hurwitz nello stesso Giornale pubblicò una dimostrazione della trascendenza di e e π fondata su principii ancora più semplici; e lo stesso fece il Gordan nei *Comptes rendus*.

La dimostrazione di Hilbert si fonda su due proposizioni. La prima enuncia semplicemente la trascendenza di e, cioè *l'impossibilità di un'equazione della forma*:

$$[1] \qquad a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0,$$

ove $n, a_0, a_1, a_2 \dots a_m$ sono degli N_1, che è il teorema primitivo di Hermite. Per dimostrare la trascendenza di π occorre un'altra proposizione, dovuta a Lindemann, cioè di dimostrare « *L'impossibilità di un'equazione della forma:*

$$[2] \qquad a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_m} = 0.$$

ove a è un N_1, e gli esponenti $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$ sono dei numeri algebrici, radici di un'equazione algebrica.

$$b_0\beta^m + b_1\beta^{m-1} + b_2\beta^{m-2} + \dots + b_m = 0,$$

ove b_0, b_1, $b_2 \dots b_m$ sono degli N_1. Questa seconda proposizione evidentemente contiene come caso particolare la prima, poichè è sempre possibile che la β siano degli N_1, e quando le radici dell'equazione relativa alle β divengono eguali fra loro, i termini corrispondenti della equazione (2) si riducono ad uno solo della forma $a_k. e^\beta$. L'idea fondamentale, su cui si fonda la dimostrazione della impossibilità dell'equazione (1), consiste a sostituire alle quantità

$$1 : e : e^2 : \dots : e^n,$$

Digitized by Google

nelle quali l'equazione è omogenea, le quantità che sono ad esse proporzionali:

$$(I_0 + E_0) : (I_1 + E_1) : (I_2 + E_2) : \dots : (I_n + E_n),$$

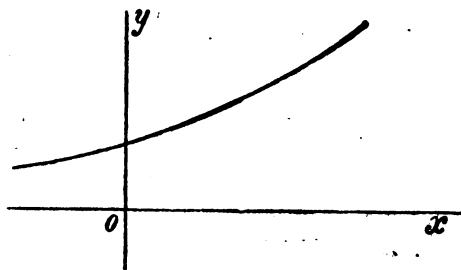
determinate in modo, che ciascuna di esse sia formata da un intiero I e da un infinitesimo (cioè una frazione piccolissima) E.

L'equazione prende allora la forma:

$$[3] \quad (aI_0 + a_1I_1 + \dots a_n I_n) + (aE_0 + a_1E_1 + \dots + a_n E_n) = 0;$$

ora si può dimostrare che le I e le E possono essere sempre scelte in modo, che la quantità nella prima parentesi naturalmente intiera sia diversa da zero, mentre la quantità della seconda parentesi diviene contemporaneamente una frazione propriamente detta.

Ora siccome la somma di un N_1 e di una Fr propriamente detta non può essere nulla, l'equazione (3) è manifestamente impossibile. Da ciò ne consegue l'impossibilità dell'equazione (2).

389. Ammessa l'impossibilità dell'equazione (2), se ne conclude facilmente la trascendenza di π mediante le considerazioni seguenti, che per primo indicò il Lindemann. Osserviamo innanzi tutto questa conseguenza del nostro problema: « *Ad eccezione del punto $x=0$, $y=1$, la curva esponenziale $y=e^x$* non ha

alcun punto algebrico », vale a dire nessun punto, le cui coordinate siano dei numeri algebrici.

In altre parole per quanto sia grande il numero dei numeri algebrici, dei quali noi possiamo immaginare, che sia ricoperto

Digitized by Google

il piano, qualunque ne sia la densità, la curva esponenziale qui disegnata segue il suo corso nel piano senza mai incontrarne, facendo eccezione il punto (0, 1).

Questo curioso risultato può dedursi come segue per l'impossibilità dell'equazione (2).

Sia y una quantità algebrica qualunque, vale a dire una radice della stessa equazione; ed impieghiamo le notazioni analoghe per x. Allora se la curva $y=e^x$ possiede un punto algebrico (x, y), oltre il punto $x=0$, $y=1$, l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l}(y - e^x)\ (y_1 - e^x)\ (y_2 - e^x) \dots \\ (y - e^{x_1})\ (y_1 - e^{x_1})\ (y_2 - e^{x_1}) \dots \\ (y - e^{x_2})\ (y_1 - e^{x_2})\ (y_2 - e^{x_2}) \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} = 0 \quad [4]$$

dovrà evidentemente verificarsi.

Ma questa equazione (4), allorchè si eseguiscono le operazioni indicate sopra, prende la forma (2), forma che si è provato impossibile.

In secondo luogo non resta più allora che a considerare l'identità ben nota: $1=e^{i\pi}$, ottenuta dalla formula di Eulero $e^{ix}=cos x + i\ sen\ x$, facendovi $x=\pi$, che è un caso particolare della formula $y=e^x$. Poichè in questa identità $y=1$ è algebrico, $x=i\pi$ è di necessità trascendente.

390. Due antecedenti tentativi per dimostrare tutto ciò geometricamente sono meritevoli di special menzione. Il primo fu di Giacomo Gregory, che dimostrò che il rapporto dell'area di un settore qualunque a quella dei poligoni inscritti o circoscritti non si può esprimere con un numero finito di termini algebrici; onde ne dedusse che la quadratura era impossibile. Ciò fu accettato da Montucla, come si può vedere nella sua « *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* », edita da P. L. Lacroix, Parigi 1831; ma la dimostrazione di Gregory non conclude nulla, in quanto che si può immaginare, che qualunque settore speciale possa essere quadrato, e questo settore speciale può essere

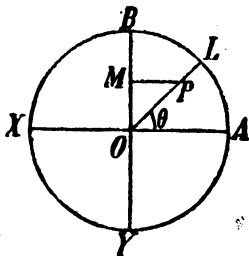
l'intiero circolo. Il secondo di questi tentativi fu fatto da Newton ed era applicabile a qualunque ovale chiuso; esso è assai conciso ed è difficile a seguirsi; quindi l'omettiamo; del resto lo si può leggere nei Principia libro I, sezione VI, lemma XXVIII.

391. Coll'aiuto della quadratrice o della concoide o della cissoide la quadratura del cerchio è facilissima, ma la costruzione di queste curve richiede la conoscenza del valore di π; onde la questione è alquanto ricercata. Qui riporteremo quelle ottenute mediante la sinussoide e la quadratrice di Dinostrato.

La curva $y = arc\ sen\ x$ è l'equazione della sinussoide disposta verticalmente. Dal punto di vista geometrico π è un'ordinata di questa curva; invece dal punto di vista della teoria delle funzioni, esso è un valore particolare della nostra funzione trascendente, cioè quello che serve a tracciare una curva trascendente, il quale disegnando la sinussoide, ci darebbe una costruzione effettiva di π.

La curva trascendente $y = arc\ sen x$ si chiama anche *curva integrale*, perchè y si può definire come l'integrale di una funzione algebrica:

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

392. La quadratrice di Dinostrato (circa 350 anni a. C.), la quale era già stata costruita prima da Ippia di Elea (circa il

420 a. C.) per la trisezione dell'angolo, viene geometricamente così definita. Sulla retta OB e sull'arco AB si muovono due punti M ed L con velocità uniformi; essi partono contemporaneamente da O ed A rispettivamente, e giungono in B nello stesso tempo. Si

Digitized by Google

tiri poi OL e per M la parallela ad OA, la quale tagli OL in P; sarà P un punto della quadratrice.

Da questa definizione ne consegue, che y è proporzionale a θ. Essendo il raggio del cerchio supposto eguale ad 1, siccome per $y = 1$ è $\theta = \frac{\pi}{2}$, così abbiamo:

$$\theta = \frac{\pi}{2} y;$$

ed essendo $\theta = arc\ tan \frac{y}{x}$, si ottiene come equazione della quadratrice:

$$\frac{y}{x} = tan\ \frac{\pi}{2} y.$$

Il punto dove la curva taglia l'asse delle x è dato da:

$$x = \frac{y}{tan\ \frac{\pi}{2} . y},$$

dove si deve fare $y = o$. Siccome per piccoli valori la tangente è uguale al suo argomento, così avremo:

$$x = \frac{y}{\frac{\pi}{2} . y} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Onde il raggio del cerchio è medio proporzionale tra il quadrante del cerchio e l'ascissa del punto d'intersezione della quadratice coll'asse delle x. Dunque la quadratrice può servire alla rettificazione del cerchio, e quindi alla quadratura di esso. Ma ciò in sostanza non è che una formulazione geometrica del problema della rettificazione del cerchio, finchè non si abbia un istrumento, col quale si possa descrivere la quadratrice con tratto continuo.

393. ***La storia di π.*** — Se π rappresenta semplicemente il rapporto della circonferenza di un cerchio al suo diametro, la de-

Digitized by Google

terminazione del suo valore numerico avrebbe ben poco interesse. È tuttavia un semplice caso che π sia definito ordinariamente in quel modo; ed esso realmente rappresenta un certo numero, che entrerebbe nell'analisi sotto qualunque aspetto si consideri l'argomento.

394. Si ricorda che un distinto professore diceva come potrebbe essere differente la vita ordinaria di una razza di esseri nati, come facilmente essi potrebbero essere, e come i procedimenti fondamentali dell'aritmetica e dell'algebra potrebbero essere differenti a quelli, che ci sembrano così evidenti; ma, aggiungeva, è impossibile di concepire un universo, in cui e e π non esistessero.

394 bis. Si può ricordare anche un aneddoto, che servirà a far vedere come ben poco la definizione ordinaria di π suggerisca le sue proprietà. *De-Morgan* spiegava ad un attuariale qual'era la probabilità, che una certa parte di una data popolazione potesse alla fine di un certo tempo essere viva; e diede la formula attuariale, che contiene π, che, in risposta ad una questione, diceva sarebbe il rapporto della circonferenza di un cerchio al suo diametro. Il suo amico, che aveva fino allora prestato orecchio con interessamento alla spiegazione, lo interruppe esclamando: « Mio caro amico, ciò può essere una illusione; e che cosa può avere a che fare un cerchio col numero di una popolazione vivente alla fine di un dato tempo? ». In realtà il fatto che il rapporto della lunghezza della circonferenza di un cerchio al suo diametro è il numero denotato con π, non offre la definizione analitica migliore di π, ed è solo una delle sue proprietà.

394 tris. L'uso di un particolar simbolo per denotare questo numero 3,14159 sembra essere stato introdotto circa l'inizio del XVIII secolo. W. Jones nel 1706 lo rappresentò con π; alcuni anni dopo Giovanni Bernoulli lo indicò con c; Eulero nel 1734 usò p e nel 1736 usò c; Chr. Goldback nel 1742 usò π; e dopo la pubblicazione dell'Analysis di Eulero si impiegò generalmente il simbolo π.

395. Il valore numerico di π può essere determinato o coll'uno o coll'altro dei due metodi di approssimazione, avvicinan-

Digitized by Google

dosi al vero valore tanto quanto si vuole. Il primo di questi due metodi è geometrico. Esso consiste nel calcolare il perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio, supponendo che la circonferenza dei cerchio sia compresa fra questi perimetri. L'approssimazione sarebbe ancora maggiore, se invece de' perimetri s'impiegassero le aree. Il secondo, che è moderno, è puramente analitico ed è fondato sulla determinazione della convergenza delle serie infinite che dànno π.

Si può aggiungere che i calcolatori di π, che adoperarono il primo metodo, riguardarono π come equivalente ad un rapporto geometrico; ma quelli, che usarono il metodo moderno, lo considerarono come un simbolo per un certo numero, che entra in quasi tutti i rami dell'Analisi matematica.

Parmi interessante di dar qui un elenco di alcune delle approssimazioni del valore di π, dati da diversi scrittori fra quelli, che vie più hanno con vantaggio studiato l'argomento.

396. Gli antichi Egiziani prendevano $\frac{256}{81}$ per il valore π che equivale a 3,1605 . . . . ; ma un'approssimazione più lungi dal vero valore fu quella di 3, usata dai Babilonesi e dagli Ebrei. È probabile che questi numeri fossero ottenuti empiricamente.

Ora veniamo ad una lunga schiera di Matematici greci, che studiarono il problema. Che le ricerche dei componenti la scuola ionica, i Pitagorici, Anassagora, Ippia, Antifo e Briso conducessero alle approssimazioni pel valore di π è dubbio; e sulle loro investigazioni non occorre intrattenersi. La quadratura di certe lunule fatta da Ippocrate di Chio è ingegnosa ed esatta, ma non può da essa dedursi un valore di π; e pare probabile che gli ultimi componenti la scuola ateniese concentrassero i loro sforzi su altre questioni.

È probabile che Euclide, l'illustre fondatore della scuola alessandrina, avesse osservato che π è maggiore di 3 e minore di 4; ma non stabilì il risultato esplicitamente.

397. Il metodo matematico per trattare un tale argomento incominciò con Archimede, che dimostrò che π è minore di $3 + \frac{1}{7}$ e maggiore di $3 + \frac{10}{71}$ cioè cade fra 3,1428 . . . . e

Digitized by Google

3,1408 . . . . Egli ottenne ciò coll'inscrivere in un cerchio e circoscrivere ad esso poligoni regolari di 96 lati; poi determinò colla geometria i perimetri di questi poligoni, e finalmente suppose che la circonferenza del cerchio era compresa fra questi perimetri; ciò condusse al risultato:

$$\frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} < \pi < 4673 + \frac{1}{2},$$

da cui dedusse i limiti dati più sopra. Questo metodo equivale ad adoperare la limitazione:

$$sen\ \theta < \theta < tan\ \theta,$$

ove è $\theta = \frac{\pi}{96}$; i valori di *sen* θ e *tan* θ furono dedotti da Archimede mediante quelli di *sen* $\frac{1}{3}\pi$ e *tan* $\frac{1}{3}\pi$ colle reiterate bisezioni dell'angolo. Mediante un poligono di n lati questo procedimento diede un valore di π esatto sino alle unità decimali dell'ordine dato dalla parte intiera di ($2\ long\ n - 1{,}19$).

Il risultato dato da Archimede è esatto sino alla seconda cifra decimale. La sua analisi mena alla conclusione, che i perimetri di questi poligoni per un cerchio, il cui diametro è 4870 piedi, cadrebbe fra 15610 piedi e 15620 piedi; attualmente è circa 15613 piedi e 9 pollici.

398. Apollonio studiò questi risultati, ma le sue osservazioni sono andate perdute.

Erone di Alessandria diede il valore di 3, ma egli indicò il risultato $\frac{22}{7}$; probabilmente il primo numero fu considerato solo some una grossolana approssimazione. La sola altra approssimazione, che si può ricordare, fu data da Tolomeo, che asserì essere $\pi = 3°\ 8'\ 30''$. Ciò è equivalente a prendere

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3 + \frac{17}{120} = 3{,}1416.$$

Digitized by Google

Gli Agrimensori romani pare abbiano usato 3, e qualche volta 4 per calcoli grossolani. Per maggiori approssimazioni essi spesso impiegarono $3 + \frac{1}{8}$ invece di $3 + \frac{1}{7}$, poichè le frazioni poi introdotte sono più convenienti nell'aritmetica duodecimale. D'altra parte Gerberto raccomandò l'uso di $\frac{22}{7}$.

399. Prima di arrivare ai matematici europei medioevali e moderni è conveniente far notare i risultati ottenuti nell'India ed in Oriente. Bandhayana prese $\frac{49}{16}$ per valore di π.

Arya-Bhata, circa il 530, diede $\frac{62832}{20000}$, che è uguale a 3,1416. Egli dimostrò che se a è il lato di un poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di diametro 1 e se b è il lato di un poligono regolare di $2n$ lati inscritto, allora

$$b^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dal lato di un esagono inscritto egli trovò successivamente i lati dei poligoni regolari di 12, 24, 48, 96, 192 e 384 lati. Il perimetro dell'ultimo è dato come eguale a $\sqrt{9,8694}$, da cui fu ottenuto il risultato per approssimazione.

Brahmagupta, circa il 650, diede $\sqrt{10}$, che è uguale a 3,1622 .... Si dice che abbia ottenuto questo valore coll'iscrivere in un cerchio di diametro unitario dei poligoni regolari di 12, 24, 48 e 96 lati, e calcolasse successivamente i loro perimetri, che egli trovò essere

$$\sqrt{9,65},\ \sqrt{9,81},\ \sqrt{9,86},\ \sqrt{9,87}$$

rispettivamente, e che abbia supposto che come il numero dei lati cresce indefinitamente, il perimetro si avvicina a $\sqrt{10}$.

Bhaskara, circa il 1150, diede due approssimazioni. Una, (probabilmente copiata da Aya-Bhata, ma disse essere stata calcolata di nuovo col metodo di Archimede mediante i perimetri dei po-

Digitized by Google

ligoni regolari di 384 lati) è $\frac{3927}{1250}$, che è uguale a 3,1416; l'altra è $\frac{754}{240}$, che è uguale a 3,1416; ma è incerto che ciò non fosse dato solo come un valore approssimato. Fra gli Arabi i valori di $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ e $\frac{62832}{20000}$ furono dati da Alkarismi circa l'830; e senza dubbio furono attinti da fonti indiane. Egli descrisse il primo come un valore approssimato, il secondo come usato dai geometri, ed il terzo come adoperato dagli astronomi.

Nelle opere chinesi i valori 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{157}{50}$ sono detti essere necessari: probabilmente i due ultimi furono copiati dagli Arabi.

400. Ritornando ai matematici europei, noi abbiamo le seguenti successive approssimazioni del valore di π; molti di quelli anteriori al XVIII secolo sono stati calcolati da principio a scopo di dimostrare l'inesattezza di qualche quadratura citata.

Leonardo Fibonacci da Pisa nel XIII secolo diede per π il valore $\frac{1440}{458 + \frac{1}{3}}$, che è uguale a 3,1418 .... Nel XV secolo Purbach diede od indicò il valore $\frac{62832}{20000}$, che è uguale a 3,1416; Cusa credeva che il valore esatto fosse

$$\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6}),$$

che è uguale a 3,1423 ....; e nel 1464 Regiomontano si dice che abbia dato un valore eguale a 3, 14243.

Vieta nel 1576 dimostrò, che π era maggiore di

$$31415926535 : 10^{10}$$

e minore di

$$31415926536 : 10^{10}.$$

Ciò fu ottenuto mediante i perimetri dei poligoni inscritti e cir-

Digitized by Google

coscritti di 6×2^{16} lati, ottenuti col ripetuto uso della formula $2\ sen^2 \frac{1}{2} \theta = 1 - cos\ \theta$. Egli diede pure un risultato equivalente alla formula:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Il padre di Adriano Mezio nel 1585 diede $\frac{355}{113}$, che è uguale a 3,14159292 .... ed è esatto fino alla 6ª cifra decimale. Ciò fu una curiosa ed avventurosa congettura, poichè tutto questo, che egli dimostrò, fu che π era compreso fra $\frac{377}{120}$ e $\frac{333}{106}$, su di che egli giunse alla conclusione, che si otterrebbe il vero valore frazionario prendendo la media dei numeratori e la media dei denominatori di queste frazioni. Nel 1593 Adriano Romanus calcolò il perimetro del poligono regolare inscritto di 1073741824 lati cioè di 2^{30}, da cui determinò il valore di π esatto alla 15esima cifra decimale. L. Van Ceulen dedicò una parte non trascurabile della sua vita a questo argomento. Nel 1596 diede il risultato di 20 cifre decimali: ciò fu calcolato col trovare i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti di 60×2^{33} lati, ottenuti col reiterato uso di un teorema da lui scoperto, equivalente alla formula:

$$1 - cos\ A = 2\ sen^2 \frac{1}{2}\ A.$$

Vieta morì nel 1610, e dietro i suoi ordini il risultato di 35 cifre decimali, che erano quante ne aveva allora calcolate, fu inciso sulla sua tomba nella chiesa di San Pietro a Leida. La sua aritmetica postuma contiene il risultato di 32 cifre decimali; ciò fu ottenuto col calcolare il perimetro di un poligono, di cui il numero dei lati è 2^{62} cioè:

4611686018427387904

Van Ceulen pure compilò una tavola dei perimetri di diversi poligoni regolari.

Digitized by Google

Willebrord Snell nel 1621 ottenne da un poligono di 2^{30} lati un'approssimazione di 34 cifre decimali. Questa è minore dei numeri dati da van Ceulen, ma il metodo di Snell era così superiore, che ottenne le sue 34 cifre decimali coll'uso di un poligono, da cui van Ceulen aveva ottenuto solo 14 o forse 16 (cifre). Similmente Snell ottenne da un esagono un'approssimazione così esatta come quella, per cui Archimede aveva considerato un poligono di 96 lati, mentre da un poligono di 96 lati egli determinò il valore di π esatto fino a sette cifre decimali, invece di due cifre decimali, ottenute da Archimede. La ragione è che Archimede avendo calcolato le lunghezze dei lati dei poligoni regolari inscritti e circoscritti di n lati, suppose che la lunghezza di $\frac{1}{n}$ della circonferenza del cerchio fosse compresa fra essi; mentre Snell costruì coi lati di questi poligoni due altri segmenti, che davano limiti più prossimi per l'area corrispondente. Il suo metodo si fonda sul teorema:

$$\frac{3 \operatorname{sen} \theta}{2 + \cos \theta} < \theta < 2 \operatorname{sen} \frac{1}{3} \theta + \tan \frac{1}{3} \theta ;$$

mediante questa limitazione un poligono di n lati dà un valore per π esatto sino alla cifra decimale, il cui ordine è dato dalla parte intera dell'espressione (4 *long* n — 0,2305), che è maggiore di due volte il numero dato dalla più antica regola. La dimostrazione di Snell del suo teorema è inesatta, benchè il risultato sia esatto.

Snell aggiunse pure una tavola dei perimetri di tutti i poligoni regolari inscritti e circoscritti, il cui numero dei lati è 10×2^n, ove n non è maggiore di 19 e non è minore di 3. Molte di queste furono date da van Ceulen, ma alcune furono ricalcolate. Questa tavola ha dimostrato utilmente la falsità delle diverse quadrature del cerchio. Un simile elenco fu dato da Giacomo Gregory.

401. Nel 1630 Grienberger coll'aiuto del teorema di Snell, spinse l'approssimazione a 39 cifre decimali. Egli fu l'ultimo matematico, che adottò il classico metodo di trovare i peri-

Digitized by Google

metri dei poligoni inscritti e circoscritti. Le approssimazioni maggiori non servono a nessuno scopo utile. Le dimostrazioni dei teoremi usati da Snell e da altri calcolatori, applicando questo metodo, furono dati da Huygens in un'opera, che può essere presa come la fine della storia di questo metodo.

Nel 1656 Wallis dimostrò che:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 . 2 . 4 . 4 6 . 6 . . . .}{1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 . . .},$$

e diede una proposizione che era stata trovata alcuni anni prima dal Visconte Brounker cioè che:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \ldots ;$$

ma nessuno di questi teoremi fu adoperato per qualsiasi estensione del calcolo di π.

I calcolatori, che vennero di poi, si sono fondati sulle serie infinite convergenti, metodo che fu certamente adoperato prima dell'invenzione del calcolo, quantunque Descartes avesse indicato un procedimento geometrico, che equivaleva ad usare tali serie. L'applicazione delle serie infinite fu proposto da Giacomo Gregory, che diede il teorema:

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \ldots ,$$

la quale è vera solo se θ è compreso fra $-\frac{1}{4}\pi$ e $+\frac{1}{4}\pi$.

Facendovi $\theta = \frac{\pi}{4}$ si ha la famosa serie di Leibnitz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots \ldots$$

Il primo matematico, che fece uso delle serie di Gregory per ottenere un'approssimazione del valore di π fu Abramo Sharp, che, nel 1699, dietro suggerimento di Halley, lo determinò con

Digitized by Google

72 cifre decimali, 71 esatte. Egli ottenne questo valore col porre $\theta = \frac{1}{6}$ nella serie di Gregory.

Machin prima del 1706 diede il risultato di 100 cifre decimali tutte esatte. Egli le calcolò colla formula:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\, tang^{-1}\frac{1}{5} - tang^{-1}\frac{1}{239}.$$

De-Lagny nel 1719 diede il risultato di 127 cifre decimali, 112 esatte, calcolandole col porre $\theta = \frac{1}{6}\pi$ nella serie di Gregory.

Hutton nel 1776 ed Eulero nel 1779 suggerirono l'uso delle formule:

$$\frac{1}{4}\pi = tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{4}\pi = tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\, tan^{-1}\frac{3}{79};$$

ma nessuno spinse l'approssimazione tanto quanto era stata prima raggiunta.

Vega nel 1789 diede il valore di π con 143 cifre decimali, 126 erano esatte; e nel 1794 con 140 cifre con 136 esatte.

Verso la fine del secolo XVIII il barone Zach vide nel *Radcliffe Library*, Oxford, un manoscritto di un autore ignoto, che dava il valore di π con 154 cifre desimali, con 152 esatte.

Nel 1841 Rutherford lo calcolò con 208 cifre decimali, 152 esatte adoprando la formula:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\, tang^{-1}\frac{1}{5} - tang^{-1}\frac{1}{70} + tan^{-1}\frac{1}{99}.$$

Nel 1844 Dase lo calcolò con 205 cifre decimali, 200 esatte, usando la formula:

$$\frac{1}{4}\pi = tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{8}.$$

Digitized by Google

Nel 1847 Clausen spinse l'approssimazione a 250 cifre decimali, 248 esatte, calcolandole indipendentemente colle formule:

$$\frac{1}{4}\pi = 2\, tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{7}$$

e

$$\frac{1}{4}\pi = 4\, tan^{-1}\frac{1}{5} - tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

Nel 1853 Rutherford spinse la sua prima approssimazione a 440 cifre decimali tutte esatte, e Guglielmo Shanks spinse l'approssimazione a 530 cifre. Nello stesso anno Shanks pubblicò un'approssimazione di 607 cifre decimali; e nel 1873 condusse l'approssimazione a 707 cifre decimali. Queste furono calcolate colla formula di Machin.

Nel 1853 Richter, probabilmente ignorando che cosa era stato fatto in Inghilterra, trovò il valore di π con 333 cifre decimali, 300 esatte; nel 1854 egli spinse l'approssimazione a 400 cifre e nel 1855 a 500.

Delle serie e delle formule, con cui queste approssimazioni si sono ottenute, quelle usate da Machin e da Dase sono forse le più facili ad applicarsi. Un'altra serie che converge rapidamente è la seguente:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \ldots.$$

e

$$\frac{\pi}{4} = 2 + 22\, tan^{-1}\frac{1}{28} + tan^{-1}\frac{1}{443} - 5\, tan^{-1}\frac{1}{1393} - 10\, tan^{-1}\frac{1}{11018};$$

quest'ultima è dovuta a Mr. Escott.

402. Fra i metodi geometrici di approssimazione al vero valore il seguente è uno dei più semplici: « S'inscrive in un dato cerchio un quadrato; ed a tre volte il diametro del cerchio si aggiunge un quinto di un lato del quadrato; il risultato differirà dalla circonferenza del cerchio meno di una millediciassettesima parte di essa ».

Digitized by Google

403. Un valore approssimato di π è stato ottenuto sperimentalmente mediante la teoria delle probabilità. Su di un piano è tracciato un numero di parallele equidistanti fra loro di a; ed un segmento di lunghezza l, minore di a, si fa cadere sul piano. La probabilità che esso cadrà in modo da intersecare una delle parallele è $\frac{2l}{a\pi}$. Se questo esperimento lo si ripete molte centinaia di volte, il rapporto del numero dei casi favorevoli al numero totale degli esperimenti sarà molto prossimo a questa frazione: così si può trovare il valore di π. Nel 1885 il sig. A. Smith di Aberdeen fece 3104 prove, e trovò $\pi = 3{,}1553$. Un allievo del prof. De-Morgan con 600 prove trovò $\pi = 3{,}137$. Nel 1864 il capitano Fox fece 1120 prove con alcune precauzioni addizionali ed ottenne come valore medio $\pi = 3{,}1419$.

404. **e)** ***Una dimostrazione semplice della trascendenza di*** π. (1). — Per viè meglio comprendere la dimostrazione della trascendenza di π sarà bene premettere quella di e.

La dimostrazione della trascendenza di e consiste nel dimostrare che e non è una radice di un'equazione algebrica della forma:

$$(1) \qquad C_n e^n + C_{n-1} e^{n-1} + \dots + C_1 e + C_0 = 0$$

ove n è un N_1 qualunque, ed ove i coefficienti C_0, C_1 .... sono numeri razionali, compreso lo 0, eccetto che è $C_0 \neq 0$, $C_n \neq 0$, poichè ciò cambierebbe il grado dell'equazione.

Per semplificare la dimostrazione consideriamo un'equazione cubica generale come la (1) di n^{mo} grado, e dimostreremo che è impossibile di avere:

$$(2) \qquad C_3 e^3 + C_2 e^2 + C_1 e + C_0 = 0.$$

Tuttavia la dimostrazione è essenzialmente la stessa come quel-

(1) Questa dimostrazione è stata tratta dall'opera « *Monographs on topics of Modern Mathematics* ecc. » edited by J. W. A. Young, of David Smith. — Londra 1911.

Digitized by Google

la per un'equazione dell'n^{mo} grado; l'utilità sta nella semplicità della esposizione.

L'estensione della dimostrazione ad un'equazione generale è ovvia. La dimostrazione richiede di considerare due importanti funzioni, che, riguardo al loro frequente uso, distingueremo coi simboli $f(x)$ e $F(x)$. La 1ª di esse è una funzione razionale intera dell'n^{mo} grado in x tale, che è $f(o) = o$. Essa è quindi della forma:

$$(a) \qquad f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ,$$

ove i coefficienti a sono numeri razionali, essendo i coefficienti nello sviluppo di $f(x)$ delle potenze di x. La dimostrazione si fonda sulla scelta ingegnosa della seguente funzione:

$$(b) \qquad F(x) = \frac{x^{n-1} \left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]^p}{(p-1)!},$$

ove p è un Np da determinarsi da ultimo di questa discussione. Se $f(x)$ si mette sotto la forma $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ cioè, se è:

$$(3) \qquad f(x) = \frac{x^{p-1} \left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]^{p-1}}{(p-1)!} = \\ = a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ,$$

è evidente che è $n = 3p + p - 1$, e che a_{p-1} è il 1º coefficiente che non è nullo; poichè la minore potenza di x è x^{p-1}. Più generalmente naturalmente il numeratore di questa frazione sarebbe $x^{p-1} \left[(x-1)(x-2) \ldots (x-m)\right]^p$; ma per i nostri scopi attuali questa scelta è sufficiente.

La 2ª funzione che interessa nella discussione è:

$$(4) \qquad F(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) + ... + f^{(n)}(x),$$

ove $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ sono le derivate successive di $f(x)$.

Per maggior chiarezza dei principali passi della dimostrazione, liberati da materie secondarie, ci proponiamo di stabilire tre lemmi riguardanti queste funzioni $f(x)$ e $F(x)$.

Digitized by Google

Lemma I. — Se è:

(c) $$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

e se s_n denota la somma dei primi n termini nelle serie e^x, così che:

(d) $$s_1 = 1, \; s_2 = 1 + \frac{x}{1!}, \; s_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \dots$$
$$s_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

quindi dalla (4) si ha:

(5) $$F(x) = 1!\, s_1 a_1 + 2!\, s_2 a_2 + 3!\, s_3 a_3 + \dots + n!\, s_n a_n.$$

In particolare

(6) $$F(o) = 1!\, a_1 + 2!\, a_2 + 3!\, a_3 + \dots + n!\, a_n.$$

Dim. In questo lemma si asserisce che se è:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

e se noi facciamo:

$$s_1 = 1, \; s_2 = 1 + \frac{x}{1!}, \; s_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \dots$$
$$s_n = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

quindi:

$$f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots + f^{(n)}(x) =$$
$$1!\, s_1 a_1 + 2!\, s_2 a_2 + \dots\, n!\, s_n a_n.$$

Per dimostrar questo, primieramente si scrive $f(x)$ sotto questa forma:

(g) $$f(x) = 1!\, a_1 \frac{x}{1!} + 2!\, a_2 \frac{x}{2!} + 3!\, a_3 \frac{x}{3!} + \dots$$
$$+ n!\, a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Digitized by Google

Facendo le derivate successive abbiamo:

$$(\alpha)\begin{cases} f'(x) = 1!\,a_1 + 2!\,a_2\frac{x}{1!} + 3!\,a_3\frac{x}{2!} + \dots + n!\,a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \\ f''(x) = 2!\,a_2 + 3!\,a_3\frac{x}{1!} + \dots + n!\,a_n\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}, \\ f'''(x) = 3!\,a_3\frac{x}{1!} + \dots + n!\,a_n\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = n!\,a_n. \end{cases}$$

Sommandole, e sostituendo s_1, s_2 .... s_n alle loro serie rispettive abbiamo:

$$f'(x) + f''(x) + \dots f^{(n)}(x) = 1!\,s_1 a_1 + 2!\,s_2 a_2 + \dots + n!\,s_n a_n.$$

Lemma II. — Ancora riferendosi a

$$(e)\ f(x) = \frac{x^{p-1}\,[(x-1)(x-2)(x-3)]^p}{(p-1)!}$$

e $$(f)\qquad F(x) = f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n)}(x),$$

se p è un Np qualunque ed n è un N_1 positivo intero, e C_0, C_1, C_2, C_3 sono degli N_1 qualunque, allora:

$$(7)\qquad C_0\,F(0) + C_1\,F(1) + C_2\,F(2) + C_3\,F(3) = C_0(3\,!)^p + pQ,$$

ove Q è un intero che dipende dai valori delle C e di p.

Dim. In esso si asserisce che

$$f(x) = \frac{x^{p-1}\,[(x-1)(x-2)(x-3)]^p}{(p-1)!}$$

e

e $$F(x) = f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n)}(x),$$

e p è un Np ed n è un N_1 positivo, e le C sono degli N_1, quindi:

$$C_0\,F(0) + C_1\,F(1) + C_2\,F(2) + C_3\,F(3) = C_0(3\,!)^p + pQ,$$

ove Q è un N_1 dipendente dai valori delle C e di p.

Digitized by Google

Ordinando $f(x)$ secondo le potenze crescenti di x, abbiamo:

$$(g)\quad f(x)=\frac{B_{p-1}\,x^{p-1}+B_p\,x^p+B_{p+1}\,x^{p+1}+\ldots.\,B_{4p-1}\,x^{4p-1}}{(p-1)\,!},$$

poichè si vede dalla (3) che la minore potenza di x è $p-1$, e la maggiore è $3p+p-1=4p-1$. È evidente che B_{p-1}, $B_p\ldots.$ $B_{4\,p-1}$ sono degli N_1, poichè essi sono prodotti di N_1, ed è

$$(h)\qquad B_{p-1}=[(-1)\,(-2)\,(-3)]^p=\pm(3!)^p\,.$$

Facendo le derivate successive in modo da determinare i valori di F(0), F(1), F(2), F(3), abbiamo, dopo aver posto zero per x,

$$f'(o)=o,\ f''(o)=o,\ldots\ f^{(p-2)}\,(o)=o;$$

ma

$$f^{(p-1)}(o)=B^{p-1},\ f^{(p)}(o)=p\ B_p\,,\ldots$$
$$f^{(n)}(o)=p\ ^{(p+1)}\ \ldots\ n\ B_n\,.$$

Quindi:

$$(f)\qquad F(o)=B_{p-1}+p\ B_p+\ldots+(p\,[p+1)\ldots n\ B_n\,].$$

Sostituendo il valore di B_{p-1} sopra veduto, si ha:
$C_0\,F(0)=C_0\,(3!)^p+$ una serie di N_1, in cui p è un fattore.

Similmente prendendo i valori di $f'(1)$, $f''(1)$, ... troviamo che F(1) è uguale ad una serie di N_1, in cui p è un fattore di ciascun termine, e così per F(2) e F(3). Quindi:

$$C_0F(o)+C_1F(1)+C_2F(2)+C_3F(3)=C_0(3!)^p+pQ.$$

Lemma III. — Si ha pure, riferendosi a:

$$(m)\qquad f(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n\,x^n=$$
$$=\frac{x^{p-1}\,[(x-1)\,(x-2)\,(x-3]^p}{(p-1)!},$$

e se è:

$$A_1=|a_1|,\ A_2=|a_2|\ldots\ A_n=|a_n|,\ e\ \ X=|x|,$$

$$(8)\quad A_1X+A_2X^2+\ldots\,A_n\,X^n=\frac{X^{p-1}\,|(X+1)\,(X+2)\,(X+3|^p}{(p-1)!}.$$

Digitized by Google

Dim. Questo lemma asserisce che se è:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \frac{x^{p-1}[(x-1\ (x-2)\ (x-3)]^p}{(p-1)!}$$

e se è:

$$A_1 = |a_1|,\ A_2 = |a_2| \dots A^n = |a^n| \text{ e } X = |x|,$$

allora è :

$$A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_n X^n = \frac{X^{p-1}[(X+1)\ (X+2)\ (X+3)]^p}{(p-1)!}.$$

Riferendosi alla 2ª forma di $f(x)$ veduta più sopra, vediamo che $f(x)$ è una funzione di x coi segni alternati. Poichè se consideriamo il caso generale di $x^k + a_1 p^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots$, e moltiplichiamo questa espressione per $x - b$, la funzione risultante avrà segni alternati, come nel caso di $(x-c)\ (x-d)$. Di più il risultato è lo stesso, salvo i segni, come quello ottenuto col moltiplicare $x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots$ per $x + b$.

Applicando reiteratamente questo teorema si dimostra che il prodotto sviluppato nel caso generale:

$$(n) \qquad f(x) = \frac{x^{p-1}[(x-1)\ (x-2)\ (x-3) \dots (x-m]^p}{(p-1)!}$$

ha gli stessi segni alternati, e si riduce, quando si prendono i valori assoluti di A_n di tutti i coefficienti a_n, e quando prendiamo 3 per m, a :

$$(p)\ A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + \dots + A_n X^n = \frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3]^p}{(p-1)!}.$$

405. ***La trascendenza di*** **e**. — Ciò posto, come punto di partenza prendiamo la serie che definisce e^x, già considerata:

$$(9) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Digitized by Google

che è convergente per tutti i valori di x. In essa S_n sta per la somma dei primi n termini come nel lemma I, così che:

$$(p)\quad \begin{cases} S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{x}{1!},\ S_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots \\ S_{n+1} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \end{cases}$$

Se, ora, moltiplichiamo la (9) successivamente per 1!, 2!, 3! . . . . *n!* e poniamo:

$$(10)\qquad U_n = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots,$$

talchè si ha

$$U_1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots$$

$$U_2 = x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2.4} + \dots \text{ecc},$$

avremo:

$$(11)\quad \begin{cases} 1!\, e^x = 1!\, S_1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots = 1!\, S_1 + U_1 \\ 2!\, e^x = 2!\, S_2 + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3.4} + \dots = 2!\, S_2 + U_2 \\ 3!\, e^x = 3!\, S_3 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{4.5} + \dots = 3!\, S_3 + U_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ n!\, e^x = n!\, S_n + x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots = n!\, S_n + U_n. \end{cases}$$

Se moltiplichiamo ambo i membri delle equazioni successive (11) per i coefficienti successivi a_1, a_2, a_3, ... a_n della (3) e sommiamo, avremo:

$$(1)\quad (1!\, a_1 + 2!\, a_2 + \dots + n!\, a_n) e^x =$$
$$(1!\, S_1 a_1 + 2!\, S_2 a_2 + \dots + n!\, S_n a^n) + (a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots + a_n U_n).$$

Digitized by Google

Ma dalla (6) sappiamo che è:

$$F(o) = 1!\,a_1 + 2!\,a_2 + \ldots + n!\,a_n\,,$$

e dalla (5)

$$(2) \qquad F(x) = 1!\,S_1 a_1 + 2!\,S_2 a_2 + \ldots + n!\,S_n a_n\,.$$

Quindi dall'equazione precedente ne segue:

$$(r') \qquad F(o)e^x = F(x) + a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n\,.$$

Per brevità poniamo:

$$(12) \qquad \psi(x) = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n\,;$$

così abbiamo:

$$(13) \qquad F(o)e^x = F(x) + \psi(x).$$

Ora abbiamo un'espressione per e^x che dipende da $F(x)$ della (4), e quindi alla fine dalla scelta di p nella (3).

Ora noi torniamo al punto essenziale della questione, e ricordiamo che dobbiamo dimostrare che è impossibile che

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + C_3 e^3$$

sia eguale a zero. Avremo evidentemente questa forma come un fattore se, nella (13), sostituiamo 0, 1, 2 e 3 successivamente ad x, e moltiplichiamo i risultati per C_0, C_1, C_2, C_3, e quindi sommiamo; così:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(o)C_0 &= C_0 F(o) + C_0 \psi(o), \\ F(o)C_1 e &= C_1 F(1) + C_1 \psi(1), \\ F(o)C_2 e^2 &= C_2 F(2) + C_2 \psi(2), \\ F(o)\,C_3 e^3 &= C_3 F(3) + C_3 \psi(3). \end{aligned} \right.$$

Addizionando abbiamo:

$$(15) \qquad F(o)\,[C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + C_3 e^3] = \\ = C_0 F(o) + C_1 F(1) + C_2 F(2) + C_3 F(3) + \\ + C_0 \psi(o) + C_1 \psi(1) + C_2 \psi(2) + C_3 \psi(3).$$

Digitized by Google

Ora facciamo l'ipotesi della (2), cioè che sia:

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + C_3 e^3 = o,$$

e dimostreremo che la (15) è impossibile, e quindi che l'ipotesi fatta è assurda.

Facendo questa sostituzione in (15), noi ricordiamo pure:

$$(s)\quad C_0 F(o) + C_1 F(1) + C_2 F(2) + C_3 F(3) = C_0 (3\,!)^p + pQ$$

per la (7).

Quindi abbiamo:

$$(16)\quad 0 = [C_0 (3\,!)^p + pQ] + [C_0 \psi(o) + C_1 \psi(1) + C_2 \psi(2) + C_3 \psi(3)],$$

ove Q è un N_1 qualunque dipendente dai valori di C e p, e ψ è la funzione definita dalla (12).

La questione ora si riduce a dimostrare che la (16) è impossibile, e quindi che e non può essere una radice di una equazione come la (3).

Noi possiamo dimostare che la (16) è impossibile, se riusciamo a dimostrare che:

(1) Il valore assoluto della 1ª parte, $C_0 \, (3!)^p + pQ$ è maggiore od uguale ad 1.

(2) Il valore assoluto della 2ª parte, $C_0 \; \psi(0) + \ldots + C_3 \; \psi \; (3)$, è minore di 1.

Poichè nel caso che possiamo provare ciò, allora nel caso più sfavorevole si avrà $\pm\, 1 \pm$ (un numero minore di 1) $= 0$, che è manifestamente impossibile; onde la (16) è impossibile.

In quanto alla 1ª parte, $C_0 \, (3!)^p + pQ$, se prendiamo p quale un Np maggiore di 3, e non fattore di C_0, $C_0 \, (3!)^p$ non è divisibile per p, ma pQ è divisibile per p. Quindi, poichè $C_0 = 0$, abbiamo il valore assoluto di

$$C_0 (3\,!)^p + pQ \geqq 1.$$

Consideriamo ora la 2ª parte della

$$(18)\qquad C_0 \psi(o) + C_1 \psi(1) + C_2 \psi(2) + C_3 \psi(3).$$

In questo ci sarà necessario di far uso del fatto, che il valore

Digitized by Google

assoluto di una somma è minore od al più uguale alla somma dei valori assoluti dei termini, come si è veduto nel caso semplice di $|2-2+2-2|=8$. E perciò le ψ funzioni sono definite in (12) nei termini delle funzioni U della (10). Consideriamo prima Un. Dalla (10) si ha:

$$(u)\quad U_n = x^n\left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

Ponendo X per $|x|$, come nella (8), abbiamo:

$$(o)\quad |U_n| \leqq X^n\left[1 + \frac{X}{n+1} + \frac{X^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right];$$

e quindi:

$$(x)\quad |U_n| < X^n\left[1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots\right],$$

poichè ciascun denominatore qui è stato rimpiazzato da uno minore. Perciò dalla (9)

$$(17)\qquad |U_n| < X^n e^X.$$

Ora avendo considerato la funzione U usata per definire la funzione ψ (12), consideriamo l'ultima, cioè:

$$(y)\qquad \psi(x) = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n.$$

In questa poniamo A_1 per $|a_1|$, A_2 per $|a_2|$, ... , così abbiamo:

$$(y)\qquad |\psi(x)| < A_1|U_1| + A_2|U_2| + \ldots + A_n\,|U_n|,$$

come nel lavoro preliminare della (17); e dando ad n i valori successivi 1, 2, 3 . . . . , abbiamo

$$(z)\qquad |\psi(x)| < e^x\,[A_1X + A_2X^2 + \ldots + A_n X^n].$$

Quindi dalla (8):

$$(z)\qquad |\psi(x)| < e^x\,\frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!};$$

onde:

$$(18)\quad |\psi(x)| < e^X(X+1)(X+2)(X+3)\,\frac{[X(X+1)(X+2)(X+3)]^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Digitized by Google

Ora per qualunque valore fissato di X possiamo prendere per p un valore così grande che

$$\text{(w)} \qquad \frac{[X(X+1)(X+2)(X+3)]^{p-1}}{(p-1)!}$$

sarà piccolo a piacere, poichè esso è dellà forma $\frac{y^n}{n!}$ (1) ed è

(1) Dimostriamo che è:

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0.$$

Infatti abbiamo:

$$\frac{h^n}{n!} = \frac{h}{1}, \frac{h}{2}, \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n}.$$

Essendo n un N_1 positivo, che può divenire grande finchè si vuole, fra le frazioni $\frac{h}{1}, \frac{h}{2}, \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n}$ se ne troverà una certamente propria, cioè che sia $\frac{h}{p} < 1$; e facciamo $\frac{h}{p} = \lambda$, sarà:

$$\frac{h}{p+1}, \frac{h}{p+2} \cdots \frac{h}{n} < \lambda^{n+p-1};$$

e posto

$$\frac{h}{1}, \frac{h}{2} \cdots \frac{h}{p-1} = a \text{ [numero fisso]},$$

sarà:

$$\frac{h^n}{n!} < a \, . \, \lambda^{n-p+1};$$

ed essendo $\lambda < 1$ si ha per $n = \infty$ $\lim \lambda^{n-p+1} = 0$; onde $\lim \frac{h^n}{n!} =$ $= a \lim \lambda^{n-p+1} = a \, . \, 0 = 0.$

Oss.: 1º Se è $h > 1$ si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = +\infty.$$

2º Se è $h < 1$ si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0.$$

1º Caso di $h > 1$. Si ha

$$\left\{\begin{array}{l} h = 1 + (h-1) \\ h^2 - h = h(h-1) > h-1 \\ h^3 - h^2 = h^2(h-1) < h-1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ h^n - h^{n-1} = h^{n-1}(h-1) < h-1 \end{array}\right| +$$

$$\overline{h^n > n(h-1) + 1.}$$

Digitized by Google

perciò il p^{esimo} termine della serie esponenziale convergente, e quindi tende a zero col crescere di p. Quindi ponendo 0, 1, 2 e 3 successivamente per x, vediamo che

$$[\psi(o)], [\psi(1)], [\psi(2)] \text{ e } [\psi(3)]$$

possono tutte divenire piccole a piacère, scegliendo p abbastanza grande, onde il valore assoluto della 2ª parte della (16) che consideriamo, cioè:

$$(w) \qquad C_0\psi(o) + C_1\psi(1) + C_2\psi(2) + C_3\psi(3),$$

si può fare piccolo a piacere, e quindi minore di 1, che era quanto si doveva dimostrare come 2ª parte della dimostrazione generale.

D'onde appare che la (16) non può essere vera, e che la (15) perciò non può essere vera, e che la (3) quindi non può essere vera; in altre parole che e non è la radice di un'equazione cubica a coeff. intieri.

E ciò che è stato dimostrato rispetto ad un'equazione di 3° grado, si può evidentemente dimostrare per un'equazione dell'n^{mo} grado, poichè nessun uso essenziale è stato fatto della restrizione di $n=3$. Onde e non può essere la radice di qualunque equazione algebrica.

Affinchè sia $h^n > k$, ove è $k > o$ e grande a piacere, basta prendere $n \gtrless \frac{k-1}{k+1}$; dunque per $n = \infty$ si ha $\lim h^n = +\infty$.

2° Caso di h < 1; allora sarà $\frac{1}{h} > 1$, quindi:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = +\infty$$

Ma se la $\frac{1}{h^n}$ deve divenire grande finchè si vuole col crescere di n, è necessario che il Dn h^n diventi piccolo finchè si vuole, onde:

$$\lim_{n=\infty} h^n = o.$$

Digitized by Google

406. ***La trascendenza di*** π. — La dimostrazione della trascendenza di π si basa su le tre proposizioni già date, cioè:

(17) $$F(o)\,e^x = F(x) + \psi(x),$$

(18) $$|\psi(x)| < e^X \frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!}$$

(19) $$1 + e^{i\pi} = o,$$

teorema di Eulero (1).

Se supponiamo π sia un numero algebrico, quindi esso è radice di un'equazione razionale intiera a coeff. razionali.

Se prendiamo come precedentemente questa equazione di 3° grado (la dimostrazione essendo essenzialmente la stessa pel caso generale), possiamo indicare la sue radici con y_1, y_2 e y_3, e una di esse sia πi. Ma dacchè è:

$$1 + e^{i\pi} = o,$$

(1) Si sa che è:

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2,71828\ldots.$$

La serie esponenziale è:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Per valori immaginarî e complessi di x, la serie serve a definire la potenza e^x (Vedi Baltzer, Parte II « Aritmetica generale » § 31). Si sa che è:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = 1 + \frac{a\,x}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \ldots = e^{ax},$$

dando alla indeterminata un valore conveniente. Facendo $a = i = \sqrt{-1}$, si ha:

(1) $$\cos x + i \operatorname{sen} = e^{ix},$$

sapendosi che è:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Facendo nella (1) $x = \pi$ si ha:

$$1 + e^{i\pi} = o$$

Digitized by Google

allora abbiamo:

$$(1 + e^{y_1})(1 + e^{y_2})(1 + e^{y_3}) = o,$$

quindi:

$$(20)\quad 1 + (e^{y_1} + e^{y_2} + e^{y_3}) + (e^{y_1+y_2} + e^{y_2+y_3} + e^{y_3+y_1}) + e^{y_1+y_2+y_3} = o.$$

Ci proponiamo di dimostrare che la (20) è impossibile. Le funzioni simmetriche delle quantità y_1, y_2, y_3 sono, secondo la nostra ipotesi, (1) numeri razionali, e quindi y_1, y_2, y_3 sono radici della equazione algebrica razionale

$$\varphi(x) = o.$$

Le funzioni simmetriche delle quantità $y_1 + y_2$, $y_2 + y_3$, $y_3 + y_1$ (per es. la loro somma di potenze) sono anche simmetriche funzioni di y_k, e sono quindi numeri razionali. Le quantità $y_1 + y_2$, $y_2 + y_3$, $y_3 + y_1$ sono quindi radici di una seconda equazione

$$\varphi_1(x) = o.$$

Similmente $y_1 + y_2 + y_3$ è le radice di un'equazione di 3° grado algebrica

$$\varphi_2(x) = o.$$

Quindi:

$$(21)\qquad \varphi(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

è una funzione intera di x che diviene 0 subito che x diviene uguale ad uno dei numeri y_i, $y_i + y_k$ o $y_1 + y_2 + y_3$. Qualcuno di questi numeri, cioè N di essi, può essere zero.

Se facciamo il prodotto (21) uguale a zero, e sopprimiamo il fattore x^N, abbiamo una equazione $\theta(x) = 0$, che possiamo considerare come ridotta ad avere i coefficienti intieri.

Poichè le radici nulle sono state soppresse, θ (0) non può essere uguale a zero, e quindi $\theta(x)$ si può scrivere così:

$$\theta(x) = ax^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = o,$$

ove a, a_1, $a_2 \ldots \ldots a_m$ sono degli N_1, ed a ed a_m non sono nulli, ed è $a > 0$.

Digitized by Google

Questa può essere facilmente trasformata, moltiplicando per a^{m-1} e ponendo z per ax, in un'equazione coi coefficienti intieri della forma:

$$(22) \qquad \theta_1(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z_2^{m-2} + \ldots + b_m = o,$$

il coefficiente della potenza maggiore è 1. Le radici dell'equazione $\theta(x) = 0$ sono x_1, x_2, $x_3 \ldots$, queste rappresentando quei numeri fra i numeri y_i, y_i y_k, $y_1 + y_2 + y_3$, che non sono uguali a 0.

Si è veduto dalla (20) che essi debbono soddisfare l'equazione

$$(23) \qquad K + e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \ldots = o.$$

Ora torniamo all'equazione fondamentale:

$$F(o) \cdot e^x = F(x) + \psi(x).$$

Se poniamo per x i numeri x_1, x_2, $x_3 \ldots$ ed addizioniamo i risultati, tenendo conto della (23), abbiamo:

$$(24) \quad -KF(o) = F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \ldots + \psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \ldots$$

o

$$(24)' \quad F(o) + F_1(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \ldots + \psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \ldots = o.$$

Ora desideriamo di dimostrare che quando facciamo una scelta conveniente della funzione intera $f(x)$, che è del tutto arbitraria, salvo per la condizione di $f(0) = 0$, la equazione (23) è impossibile. Onde ne seguirà che la nostra sola ipotesi, cioè che π è un numero algebrico, è sbagliata.

Se noi proviamo che la

1. $$KF(o) + F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \ldots$$

è un intero e $\neq 0$;

2. Il valore assoluto di

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \ldots < 1;$$

Digitized by Google

allora avremo dimostrato la impossibilità della (24); poichè una somma di un N_1 e di un numero, il cui valore assoluto è minore di 1, non può essere zero.

Prima rappresentiamo con p un N_p, e prendiamo per $f(x)$ una funzione intera

$$(25) \qquad f(x) = \frac{z^{p-1}[\theta_1(z)]^p}{(p-1)!} = \frac{a^{mp-1}x^{p-1}[\theta(x)]^p}{(p-1)!}$$

un'equazione che è evidente pel fatto che prendevamo $z = ax$ e moltiplicavamo $\theta(x)$ per a^{m-1}, onde formavamo $\theta(z)$.

Ordiniamo $[\theta(z)]^p$ secondo le potenze crescenti di z, così abbiamo:

$$[\theta(z)]^p = A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + \ldots = A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \ldots,$$

ove i coefficienti A sono interi, e, dalla (22), $A_0 = b_m^p$, e quindi $\neq 0$. Ora dalla (25) ho:

$$(26) \qquad f(x) = \frac{A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \ldots}{(p-1)!}.$$

Prendiamo le derivate, e facciamo $x=0$, avremo:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(o) = o,\ f'(o) = o, \ldots,\ f^{(p-2)}(o) = o, \\ f^{(p-1)}(o) = A_0 a^{p-1} = b_m{}^p a^{p-1}, \\ f^{(p)}(o) = p A_1 a^p, \\ f^{(p+1)}(o) = p(p+1) A_2 a^{p+1}, \ldots \end{array} \right.$$

Ora scegliamo un valore per p maggiore del maggiore numero a, b_m, K. Allora $f^{(p-1)}(0)$ non è divisibile per p, mentre tutte le altre funzioni derivate sono nulle o divisibili per p.

Quindi F (0), che per la (4) è eguale a $f'(0) + f''(0) + \ldots$, è un N_1 non divisibile per p; e così K . F (0) è anche un N_1 non divisibile per p, che ci dice la natura della parte della 1ª funzione presa in considerazione.

Derivando la (22) usiamo z per ax, e possiamo quindi pren-

Digitized by Google

dere $f(x)$ e ordinarla secondo le potenze crescenti di $(z - z_k)$, ove z_k è una delle radici della (22), così abbiamo:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{(z - z_k)^p B_1(z_k) + (z - z_k)^{p+1} B_2(z_k) + \dots}{(p-1)!} \\ &= \frac{a^p (x - x_k)^p B_1(z_k) + a^{p+1}(x - x_k)^{p+1} B_2(z_k) + \dots}{(p-1)!}, \end{aligned} \right.$$

ove $B_1(z_k)$, $B_2(z_k)$, ... sono funzioni intere di z_k coi coefficienti razionali. Quindi, come colla equazione (26), abbiamo:

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_k) = o,\ f'(x_k) = o,\ f''(x_k) = o, \dots f^{(p-1)}(x_k) = o \\ & f^{(p)}(x_k) = p\, a^p B_1(z_k),\ f^{(p+1)}(x_k) = p(p+1) a^{p+1} B_2(z_k) \dots \end{aligned} \right.$$

Se ora facciamo:

$$(C) \qquad Q(z_k) = a^p B_1(z_k) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_k) + \dots,$$

abbiamo dalla (4),

$$(28) \qquad F(x_k) = p\, Q(z_k).$$

Perciò:

$$(29) \quad F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \dots = p[Q(z_1) + Q(z_2) + Q(z_3) + \dots].$$

Ma il 2° membro della (29) è una funzione simmetrica intiera delle m radici dell'equazione (22), quindi è un N_1, e contiene il fattore p. Ora abbiamo dimostrato che $K . f(0)$ è un N_1 non divisibile per p e che la somma delle funzioni $F(x_k)$ è un N_1, che è divisibile per p; talchè

$$(D) \qquad K F(o) + F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \dots$$

è un N_1 e non divisibile per p, quindi non è nullo, che era la prima cosa da dimostrare.

Ora consideriamo la seconda cosa da provare, che il valore assoluto di:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \dots$$

è minore di 1.

Digitized by Google

Per fare ciò incominciamo con

$$(29)\quad |\psi(x)| < e^{X} \frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^{p}}{(p-1)!}.$$

Prendendo

$$\theta(x) = ax^{m} + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = o,$$

già considerata, scriviamo questa:

$$(30)\qquad \theta(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots - \ldots(x-x_m).$$

Onde dalle (25) e (30) abbiamo:

$$(31)\ f(x) = \frac{a^{(m+1)p-1} x^{p-1}(x-x_1)^{p}(x-x_2)^{p}\ldots(x-x_m)^{p}}{(p-1)!}.$$

Ponendo X per $|x|$, e K_k per $|x_k|$, è evidente che i coefficienti della (31) non sono maggiori di quelli della

$$(E)\qquad \frac{a^{m+1)p-1}\ x^{p-1}(x+X_1)^{p}(x+X_2)^{p}\ \ldots(x+X_m)^{p}}{(p-1)!}.$$

Se ora poniamo:

$$(E)\qquad P(X) = a^{m+1} X(X+X_1)(X+X_2)\ldots(X+X_m),$$

allora per ogni numero positivo X abbiamo:

$$(G)\ \frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^{p}}{(p-1)!} < \frac{[P(X)]^{p}}{aX(p-1)!} < \frac{P(X)}{aX}\quad \frac{[P(X]^{p}}{(p-1)!}.$$

Ora procediamo come per la (18). Per qualunque valore fissato per X possiamo prendere un valore di p così grande che

$$(H)\qquad \frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^{p}}{(p-1)!}$$

sarà piccolo a piacere.

Digitized by Google

Ora ricordiamo che è:

$$(18) \quad \psi(x) < e^{X} \frac{X^{p+1}[X+1)(X+2)(X+3)]^{p}}{(p-1)!}.$$

Quindi ψ (x) si può rendere piccolo a piacere; perciò il valore assoluto di:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \ldots.$$

si può rendere minore di 1 col prendere un valore conveniente di p, che dimostra la seconda parte della proposizione.

I due punti necessari per dimostrare la trascendenza di π ora sono stati dimostrati. In altre parole π non soddisfa a nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali, e quindi non può trovarsi coi mezzi delle operazioni algebriche ordinarie; perciò non lo si può costruire geometricamente coll'uso degli istrumenti della geometria elementare (riga e compasso), e nemmeno coll'aiuto delle curve algebriche più elevate.

Digitized by Google

INDICE

N INV GEN 3223

Digitized by Google

L' INDAGINE MODERNA

Sintesi scientifica generale—Scienze speciali—Filosofia

Questa Raccolta ha già attuato una parte del vasto programma con cui sorse, e che era di fornire agli studiosi italiani delle ottime opere di sintesi scientifico-filosofica del nostro tempo. Tale programma verrà svolgendosi ancora e sempre più intensamente, sì che la Raccolta abbia a riuscire, a poco a poco, una vera e vasta enciclopedia del pensiero moderno.

N. 1. — WALLACE (Alfred Russel). **Il posto dell'uomo nell'universo.** *Studii sui risultati delle ricerche scientifiche*

N. 2. — LOEB (Jacques). **Fisiologia comparata del cervello e psicologia comparata**

N. 3. — LUGARO (Ernesto). **I problemi odierni della psichiatria**

N. 4. — WHETHAM (W. C. D.). **Lo stato attuale della fisica**

N. 5. — RUTA (Enrico). **La psiche sociale.** *Unità di origine e di fine*

N. 6 7. — DE VRIES (Hugo). **Specie e varietà** *e loro origine per mutazione*

N. 8. — TOCCO (Felice). **Studi kantiani**

N. 9. — LE DANTEC (Félix). **Filosofia biologica**

Digitized by Google

N. 10. — HADDON (Alfred H.). **Lo Studio dell' uomo**

N.11-12.— WINDELBAND (Wilhelm). **Storia della filosofia,** 2 volumi

N. 13. — RIBOT (Théodule). **Psicologia dei sentimenti.**

N. 14. — DRIESCH (Hans) **Il vitalismo.** ***Storia e dottrina***

N. 15. — TAMASSIA (Nino). **La famiglia italiana nei secoli XV e XVI**

N.16-17.— REINACH (Salomon) e DELLA TORRE (Arnaldo). **Orpheus.** ***Storia generale delle religioni,*** 2 volumi

N. 18. — WITASEK (Stephan). **Principi di estetica generale**

N. 19. — SALVATORELLI (E.). **La Bibbia.** Introduzione all' Antico e al nuovo testamento

N. 20. — DE SARLO (F.). **Il pensiero moderno.**

N. 21. — EDMUNDS (Albert J.). **I vangeli di Budda e di Cristo**

N. 22. — ELLIS (Havelock). **Psicologia del sesso — Pudore, periodicità sessuale, auto-erotismo**

N. 23. — RAMSAY (William). **Chimica e chimici**

N. 24. — ELLIS (Havelock). **L'uomo e la donna.**

N. 25. — BARZELLOTTI (Giacomo). **L'opera storica della filosofia**

N. 26. — BARATONO (Adelchi). **Critica e pedagogia dei valori.** (Saggio)

N. 27. — RENSI (Giuseppe). **La Filosofia dell'Autorità**

Digitized by Google